UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

MARISTEL DO NASCIMENTO

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA FRACTAL EM SALA DE AULA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

DISSERTAÇÃO

PONTA GROSSA

2012

MARISTEL DO NASCIMENTO

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA FRACTAL EM SALA DE AULA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus de Ponta Grossa. Linha de Pesquisa: Fundamentos e Metodologias para o Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Sani de Carvalho Rutz da Silva

Co-orientadora: Profa. Dra. Nilcéia Ap. Maciel Pinheiro

PONTA GROSSA

2012

N244 Nascimento, Maristel do

Uma proposta metodológica para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica. / Maristel do Nascimento. Ponta Grossa, 2012.
87 f.: il. 30 cm.

Orientadora: Profa. Dra. Sani de Carvalho Rutz da Silva
Co-orientador: Profa. Dra. Nilcéia Ap. Maciel Pinheiro

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campus de Ponta Grossa.

1. Diretrizes curriculares. 2. Geometria fractal. 3. Ensino aprendizagem. I. Silva, Sani de Carvalho Rutz da. II. Pinheiro, Nilcéia Ap. Maciel. III. Título.

CDD 507

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus de Ponta Grossa
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título da Dissertação Nº 31/2012

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA fRACTAL EM SALA DE AULA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

por

Maristel do Nascimento

Esta dissertação foi apresentada às **09 horas** de **23 de fevereiro de 2012** como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, com área de concentração em Ciência, Tecnologia e Ensino, linha de pesquisa em **Fundamentos e Metodologia para o ensino de Ciências e Matemática**, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia. O candidato foi argüido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo citados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Profª. Drª Lucelina Batista dos Santos
(UFPR)

Profª. Drª.Susana Soares Tozetto (UEPG)

Prof. Dr. Guataçara dos Santos Junior
(UTFPR)

Profª. Drª. Sani de Carvalho Rutz da Silva
(UTFPR) - *Orientador*

Prof. Dr. Guataçara dos Santos Junior
(UTFPR)
Coordenador do PPGCT

A FOLHA DE APROVAÇÃO ASSINADA ENCONTRA-SE NO DEPARTAMENTO DE REGISTROS ACADÊMICOS DA UTFPR – CÂMPUS PONTA GROSSA

AGRADECIMENTOS

A Deus, que em todos os momentos com sua luz iluminou o meu caminho. "Deus está aqui neste momento sua presença é real em meu viver"

À minha orientadora Professora Doutora Sani de Carvalho Rutz da Silva pela sua paciência e por acreditar que este trabalho seria possível.

À minha co-orientadora Professora Doutora Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro, pelo seu carinho e suas orientações que foram essenciais na construção deste trabalho.

Ao meu saudoso pai, que no pouco tempo em que convivemos me mostrou que a maior riqueza que podemos deixar para nossos os filhos é o estudo.

À minha mãe, cujas palavras de sabedoria me deram força e coragem, sempre mostrando que nada é impossível quando acreditamos em nossa capacidade. "Com quem aprendi a buscar o que de melhor existe nas pessoas, no mundo e em mim mesma".

À minha filha Pâmela e minha neta Heloisa que souberam entender as ausências e me estimularam na busca do meu sonho.

Aos meus irmãos Luiz, José, Marcos, Ângela e Cláudia: que foram as forças que moveram o meu querer.

Às amigas, Eliana, Josiane, Rosni e Danieli, pelo incentivo nas horas difíceis.

À instituição, professores e coordenadores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia que me proporcionaram a oportunidade de realizar esta etapa tão importante para minha vida pessoal e profissional.

"Não é o ângulo reto que me atrai, nem a linha reta, dura, inflexível, criada pelo homem. O que me atrai é a curva livre, a curva que encontramos nas montanhas do meu país, no curso sinuoso dos seus rios, nas ondas do mar, nas nuvens do céu. De curvas é feito todo o universo. O universo curvo de Einstein".

(adaptado de Oscar Niemayer)

RESUMO

NASCIMENTO, Maristel do. **Uma proposta metodológica para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica**. 2012. 87 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2012.

A presente dissertação trata do ensino de Geometria proposto nas Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática do Paraná. Neste documento a orientação é que, paralelamente, ao ensino dos conceitos de geometria euclidiana também sejam contemplados tópicos de Geometria Fractal. O objetivo da investigação foi propor diferentes atividades de ensino, que permitam aos alunos perceberem a existência e as características básicas da Geometria Fractal. Do ponto de vista metodológico, o estudo inseriu-se numa pesquisa qualitativa, baseado num estudo, envolvendo alunos da 1ª série do Ensino Médio de um colégio público estadual da cidade de Ponta Grossa (PR). A pesquisa orientou-se pela seguinte questão: Como introduzir os conceitos básicos de Geometria Fractal no Ensino Médio, por meio de diferentes atividades? Os dados foram recolhidos a partir da aplicação de uma oficina, envolvendo esta geometria. A investigação evidenciou a defasagem dos alunos que iniciam o Ensino Médio, em relação à compreensão dos conceitos geométricos básicos e também que é possível o professor abordar outras geometrias integradas ao ensino desde que busque atividades diferenciadas que possibilite aos alunos uma participação ativa no processo ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Diretrizes Curriculares. Geometria Fractal. Ensino Aprendizagem.

ABSTRACT

NASCIMENTO, Maristel. **A methodology for the teaching of fractal geometry in the classroom in basic education**. 2012. 87 p. Dissertation (Master in Teaching Science and Technology) - Graduate Program in Teaching Science and Technology, Federal Technology University - Parana. Ponta Grossa, 2012.

The present investigation deals with the teaching of geometry proposed by the Curriculum Guidelines for Mathematics State of Parana. In this guidance document that is parallel to teaching the concepts of Euclidean geometry are also covered topics Fractal Geometry. The aim of the research was to propose different teaching activities that allow students to realize the existence and basic characteristics of fractal geometry and also present an educational booklet to help teachers in tackling this issue. From the methodological point of view the study was part of a qualitative study, based on a study involving students from one grade of high school to a state public school of Ponta Grossa in Parana state. The research was guided by the following question: The use of diversified activities that can contribute to high school students understand the basic concepts of fractal geometry? Data were collected from the application of a workshop involving this geometry. The investigation showed the gap of pupils starting secondary school in relation to the basic understanding of geometric concepts and that the teacher can address other geometries integrated education from the different activities that seeks to enable students to participate actively in the learning process.

Keywords: Curriculum Guidelines. Fractal Geometry. Teaching Learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS E ACRÔNIMOS

DCE/PR	Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná
FNDE	Fundo Nacional do Desenvolvimento Educacional
LDB	Leis de Diretrizes e Base da Educação
MEC	Ministério da Educação e Cultura
NRE	Núcleo Regional de Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PHC	Pedagogia Histórico Crítica
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PNLEM	Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio
SEED	Secretaria de Estado da Educação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ensinar Geometria de maneira que contribua para uma melhor compreensão do mundo em que vivemos possibilitando o desenvolvimento do pensamento geométrico, foi o fator que influenciou o interesse por esta pesquisa.

O envolvimento com o Ensino Fundamental e Médio da rede estadual de Ensino, como coordenadora de Matemática, junto ao Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa, proporcionou-nos a oportunidade de observar a realidade e verificar a necessidade de aprofundamento da questão, tendo em vista as inquietações com as dificuldades enfrentadas por professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de Geometria.

Tais conceitos de Geometria, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, por muito tempo foram relegados, ficando para o final do ano letivo, quando havia tempo e, muitas vezes, eram apresentados de forma expositiva em que o professor apresentava definições, exemplos e os alunos resolviam listas de exercícios, limitando seu ensino apenas à sua forma abstrata e axiomática e a aprendizagem por memorização de regras e fórmulas.

Atualmente, a preocupação com o ensino de geometria norteia os documentos que orientam o ensino de matemática na Educação Básica. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e as Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática do Paraná (DCE) reforçam a importância do ensino de geometria para o desenvolvimento integral do aluno. “Trazer para a educação escolar um ensino diferente daquele proveniente do ensino clássico, que privilegiava métodos puramente sintéticos, cuja premissa pautava o rigor das demonstrações matemáticas” (PARANÁ, 2008, p.47) é um dos objetivos das DCE, que apresentam uma proposta de estudo que possibilita aos estudantes realizarem análises, discussões, conjecturas, apropriações de conceitos e formulação de ideias.

Nas DCE de Matemática do Estado do Paraná as Geometrias são caracterizadas como conteúdo estruturante, ou seja, conhecimento de grande amplitude, caracterizados por conceitos e práticas que identificam e organizam os campos de estudos de uma disciplina. E tanto para o Ensino Fundamental, como para o Ensino Médio, o conteúdo Geometrias se desdobra nos conteúdos específicos: Geometria Plana, Espacial, Analítica, Noções Básicas de Geometria Não Euclidianas entre elas a Geometria Fractal. Orientando assim o seu ensino:

> No Ensino Fundamental o ensino deve levar o aluno a compreender geometria projetiva (ponto de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e geometria dos fractais... Na Geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades. (PARANÁ, 2008, p. 56-57).

Dentre as geometrias propostas, uma, que nos tem chamado atenção por ser considerada “recente”, porém, amplamente presente no cotidiano dos alunos é a geometria fractal. Os fractais permitem aos alunos uma melhor compreensão das formas da natureza, possibilitando a percepção de padrões geométricos, similaridade (parte-todo) e a utilização de *softwares* específicos, um recurso que facilita a visualização, elemento essencial na compreensão dos conceitos geométricos.

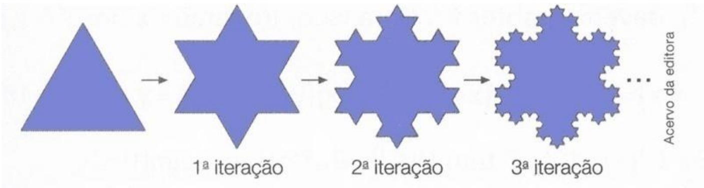
Nesse sentido, o tema Geometria Fractal, começa a ser vinculado nos planos curriculares de matemática, trazendo inquietação e insegurança aos professores, visto que, para a maioria, este tema não foi abordado nos seus cursos de formação.

A angústia dos professores também é gerada pelo fato de que o livro didático, considerado por muitos, como a única fonte de consulta para preparação de suas aulas, as pequenas menções a esse tema é simplesmente ilustrativa, não levando o professor, e em consequência, o aluno a refletir sobre a importância do seu ensino.

Cabe salientar que não se trata de uma crítica ao livro didático, pois o professor poderia aproveitar essas menções e produzir materiais para a abordagem do conceito.

Um exemplo, é o problema encontrado no livro “Matemática Coleção Novo Olhar”, (SOUZA, 2010, p. 185), apresentado no Quadro 1. Este problema envolvendo cálculos com fractais pode ser utilizado como ponto de partida para o professor abordar este tema em sala de aula, mas isso raramente acontece.

33. O estudo dos fractais tem revelado de grande importância em vários campos científicos, como na Biologia e Meteorologia. Os fractais são estruturas geométricas complexas que em geral seguem uma ordem. Um exemplo de fractal é o chamado floco de neve, que recebe esse nome devido a sua semelhança com um floco de neve natural. Esse fractal pode ser construído a partir de algumas iterações em triângulo equilátero. Na 1ª, basta dividir cada lado do triângulo equilátero em três partes iguais e, sobre a parte central de cada lado, construir outro triângulo equilátero. A 2ª iteração consiste em dividir cada lado da nova figura em três partes iguais e, sobre cada parte central, construir um novo triângulo equilátero, e assim sucessivamente. Considerando o Triângulo inicial com iteração zero e lado medindo uma unidade, determine o perímetro da figura obtida na: primeira, terceira e sétima iterações.



Quadro 1 - Problema envolvendo Geometria dos Fractais
Fonte: Souza (2010, p. 185)

Numa tentativa de criar alternativas que possibilitem aos professores a abordagem da Geometria Fractais, surgiu à proposta desta pesquisa que traz como questão norteadora:

Como introduzir os conceitos básicos de Geometria Fractal no Ensino Médio, por meio de diferentes atividades?

Visando responder a referida questão, surge o objetivo geral da pesquisa: Analisar se diferentes atividades de ensino permitem aos alunos compreender a existência e a aplicação da Geometria Fractal.

Decorrentes do objetivo geral surgem os objetivos Específicos:

- Avaliar os conhecimentos prévios que os alunos possuem sobre Geometria plana, como suporte para o entendimento da Geometria Fractal;
- Propor diferentes atividades de ensino envolvendo os conceitos básicos de Geometria Fractal;
- Analisar se a utilização do *software Fractal Forge* pode contribuir para que os alunos visualizem e explorem diferentes Fractais;
- Subsidiar os professores com material didático (caderno pedagógico), com orientações para o desenvolvimento do trabalho em sala de aula da Geometria Fractal.

Sendo assim, para respondermos à questão proposta, norteada pelos objetivos, organizamos este trabalho em quatro capítulos, nos quais, se pretende refletir sobre o ensino de Geometria e descrever as possíveis contribuições para o desenvolvimento do pensamento geométrico, com a aplicação de diferentes atividades na abordagem dos conceitos da Geometria Fractal.

A introdução contextualiza a pesquisa, justificando a importância do ensino de Geometria para a formação integral do aluno e também apresenta a questão que norteou a pesquisa, e os objetivos do trabalho.

O segundo capítulo é destinado ao referencial teórico que sustenta a pesquisa. Os temas tratados são: Um estudo sobre desenvolvimento da geometria e sua importância para o desenvolvimento integral da criança, os documentos de orientações curriculares PCN e DCE do Paraná.

Também neste capítulo é contemplado: o desenvolvimento da Geometria Fractal, a partir da publicação dos trabalhos de Mandelbrot em 1975, suas características, o que a define como uma geometria não euclidiana e alguns problemas envolvendo a Geometria Fractal abordados no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), em alguns vestibulares e livros didáticos.

No terceiro capítulo apresentamos a descrição da metodologia utilizada para o desenvolvimento da pesquisa, as etapas ou passos pelos quais a mesma foi realizada.

O quarto capítulo é composto por duas fases correlacionadas. A primeira consiste no desenvolvimento do estudo que apresenta o contexto da pesquisa e a descrição da turma em relação aos conhecimentos de geometria, após a realização de uma avaliação diagnóstica. Na segunda fase são apresentadas as análises dos resultados obtidos da pesquisa com a aplicação aos alunos das atividades envolvendo os conceitos da Geometria Fractal.

A presente pesquisa apresentará como produto final um Caderno Pedagógico. A escolha pela produção deste material deve-se ao fato de que pode ser composto por textos que contemplam a fundamentação teórica do objeto da pesquisa, complementado por sugestões de atividades e encaminhamento metodológico, envolvendo os conceitos de Geometria Fractal, que auxiliará o professor na abordagem destes conteúdos em sala de aula.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 A GEOMETRIA – SUA HISTÓRIA

Visando entender os motivos que levaram a inclusão da Geometria Fractal nos documentos que orientam o ensino de matemática, tanto para o Ensino Fundamental como para o Ensino Médio, faz-se necessário um breve resgate histórico da evolução da geometria.

A necessidade e a curiosidade são fatores que segundo Eves (1992) e Dante (2005) deram origem às descobertas geométricas. Para Dante:

> No Egito, desde 1300 a.C a Geometria já era assunto corrente. Agrimensores usavam-na para medir terrenos e construtores recorriam a ela para suas edificações. A existência das grandes pirâmides perto do Nilo prova que os egípcios conheciam Geometria e sabiam usá-la bem. Tão famosa era a geometria egípcia que matemáticos gregos como Tales e Pitágoras viajavam de sua terra ao Egito para ver o que havia de novo em matéria de Geometria. (DANTE, 2005, p.359).

Para Eves (1992) “a noção de distância foi, sem dúvida, um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos. A necessidade de delimitar a terra levou à noção de figuras geométricas simples”, justificando o significado da palavra “Geometria” como “medida de terra”.

A principal fonte de informação relacionada à Geometria egípcia antiga é o chamado “Papiro de Rhind”, cuja data é aproximadamente de 1650 a.C, são textos matemáticos e contém 85 problemas relacionados a geometria. “A maioria desses problemas provém de fórmulas de mensuração necessárias para calcular áreas e volumes de celeiros”. (EVES, 1992. p. 5).

A geometria antes dos gregos era puramente experimental e foram eles os primeiros a introduzir o raciocínio dedutivo, por volta de 600 a.C. os filósofos e matemáticos gregos como Tales e Pitágoras passaram a sistematizar os conhecimentos da época. (DANTE, 2005, p. 359).

> Os gregos insistiram que fatos geométricos deveriam ser estabelecidos, não por procedimentos empíricos, mas por raciocínios dedutivos; verdades geométricas deviam ser obtidas no gabinete de estudos, e não no laboratório. Em suma, os gregos transformaram a geometria empírica ou científica dos egípcios e babilônios antigos no que poderíamos chamar de geometria “sistemática” ou “demonstrativa”. (EVES, 1992, p. 7).

Segundo Dante (2005), foi com o matemático grego Euclides que a geometria se desenvolveu, e transformou a cidade egípcia de Alexandria no grande centro mundial de geometria, por volta de 300 a.C.

Euclides reuniu em uma obra denominada “Elementos”, a maior parte de todo conhecimento de geometria da sua época. Seu livro tornou-se um clássico que até os dias atuais é referência para o ensino. As DCE (PARANÁ, 2008), de Matemática do Estado do Paraná confirmam a importância da obra de Euclides:

> A obra de Euclides, que apresenta a base do conhecimento matemático por meio dos axiomas e postulados, contempla a geometria plana, teoria das proporções aplicadas às grandezas em geral, geometria de figuras semelhantes, a teoria dos números incomensuráveis e esteriometria – que estuda as relações métricas da pirâmide, do prisma, do cone e do cilindro, polígonos regulares, especialmente do triângulo e do pentágono. (PARANÁ, 2008, p. 39).

A obra de Euclides tornou-se tão importante que na época, nas portas das escolas gregas era colocada a inscrição “Não entre nesta escola se você não aprendeu os Elementos de Euclides” (EVES, 1992).

Sua obra que composta de treze volumes, sistematiza todo o conhecimento geométrico da época, está, segundo Boyer (1974), assim dividido:

1º Livro descreve sobre triângulos e o Teorema de Pitágoras;

2º Livro descreve as transformações de Áreas de quadrados e retângulos;

3º Livro descreve os conceitos de círculos;

4º Livro descreve sobre os polígonos inscritos e circunscritos;

5º Livro descreve as definições geométricas das proporções;

6º Livro descreve os estudos sobre a semelhança dos polígonos;

7º, 8º e 9º Livros descreve a teoria dos números;

10º Livro descreve o estudo dos números irracionais;

11º, 12º e 13º Livros descrevem o estudo da geometria espacial.

Para Euclides a geometria era uma ciência dedutiva que operava a partir de postulados ou axiomas.

Coutinho (2001), afirma que a Geometria de Euclides baseia-se em postulados e axiomas, que, em geral, são noções facilmente aceitas pela nossa intuição. ”A base da geometria de Euclides encontra-se nos seus postulados”, na geometria dedutiva, os postulados de Euclides são considerados pilares indiscutíveis.

Segundo Cruz (2008), Euclides inicialmente parte de duas definições fundamentais, a de reta e a de ponto. “Ponto é o que não tem dimensões e reta um comprimento sem medida” (CRUZ, 2008, p. 9) e a partir desses conceitos, assenta sua geometria através de cinco postulados, que foram assim formulados:

> 1. Dois pontos distintos determinam uma reta.
> 2. A partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário.
> 3. É possível obter uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.
> 4. Todos os ângulos retos são iguais.
> 5. Se uma reta secante a duas outras, forma ângulos, de um mesmo lado desta secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente, encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado.

O quinto postulado, atualmente é conhecido como postulado das paralelas e apresentado utilizando as palavras: “Dados um ponto P e uma reta r, existe uma única reta que passa pelo ponto P e é paralela a r”. (COUTINHO, 2001, p. 25).

Os primeiros quatros postulados são facilmente evidenciados, entretanto, o quinto, conhecido como postulado das paralelas é diferente e tem causado dificuldade de aceitação desde a Grécia Antiga. Segundo Eves (1992) “esse postulado não tem a concisão dos outros postulados de Euclides, e parece não ter a qualidade, exigida pela axiomática material grega da obviedade ou da pronta aceitabilidade”.

As tentativas para provar o quinto postulado a partir dos quatros primeiros foram investigadas e culminaram em muitos desenvolvimentos na Matemática Moderna. Atualmente é consenso que sua validade depende da opção da superfície geométrica adotada. Os estudos para validar este postulado são considerados o ponto de partida para o desenvolvimento das Geometrias não euclidianas.

Foi apenas no século XIX que os estudos de Lobachewsky, Bolyai, Riemann e Gauss indicaram uma nova abordagem de conceber o conhecimento matemático, dando origem a outras geometrias tão logicamente aceitas quanto a Euclidiana.

Segundo Dante (2005), o matemático Nicolai Lobachevsky, (1792-1856) foi o primeiro a criar a sua própria teoria; outro mestre da geometria, Bernhard Riemann, (1826-1866), criou também um sistema diferente que contraria o quinto postulado de Euclides.

Essas teorias se tornaram conhecidas pelo nome de “geometrias não euclidianas”, e a partir dessas novas concepções foram possíveis muitos avanços às ciências exatas do século XX, entre elas a Teoria da Relatividade de Einstein.

Para Kaleff e Nascimento (2004, p.14 apud CRUZ, 2008) “Para uma Geometria ser chamada não euclidiana é preciso que em seu conjunto de axiomas, pelos menos um dos axiomas da Geometria Euclidiana não seja verdadeiro”. Nesse conceito insere-se a geometria fractal.

2.2 A GEOMETRIA FRACTAL

Ao ser lançado ao ar, a fumaça de um cigarro, qual é a forma que ela toma? Qual é a previsão do tempo para hoje? O imprevisível está em nosso cotidiano. É impossível para o homem prever o comportamento desses fenômenos, pois envolvem muitas variáveis. Fenômenos como estes, que não seguem um padrão e nem têm uma regularidade constituem um sistema caótico. (JANOS, 2008).

A Geometria Fractal está ligada a esta ciência chamada Caos, tendo em vista que na natureza coexistem a ordem (o determinismo) e o Caos (a imprevisibilidade), “assim a estrutura fragmentada do fractal fornece certa ordem ao Caos e busca padrões dentro de um sistema por vezes aparentemente aleatório” (BARBOSA, 2005, p.10).

O estudo dos fractais possibilita a percepção de infinito. James Gleick, citado por Nunes (2006) afirma: “Para os olhos da mente, um fractal é a maneira de entrever o infinito”.

Segundo Capra (1996), o matemático Frances Benoit Mandelbrot a partir da década de 50 iniciou seus estudos da geometria de fenômenos naturais irregulares e compreendeu que estas formas geométricas apresentavam características comuns bastante notáveis.

Matemáticos como George Cantor, Giusepe Peano, Helge Von Koch e Waclaw Sierpinski anterior ao trabalho de Mandelbrot, já haviam criados figuras que não atendiam às definições da Geometria Euclidiana, consideravam estranhas e indefinidas, essas figuras receberam o nome de “monstros matemáticos”. Para Janos (2008) esta designação se deu pelo fato que, diferente do que estamos acostumados, estas figuras nunca são realmente retas ou curvas, são objetos sem forma definida.

George Cantor (1845-1918), matemático descendente de portugueses, nascido na Rússia, adotou nacionalidade alemã, foi professor da Universidade de Hale, dedicou muito de seus estudos em pesquisas relativas à fundamentação da matemática, em 1883 publicou um trabalho no qual apresentava um conjunto que hoje conhecemos por “Conjunto de Cantor” ou “Poeira de Cantor” e este talvez tenha sido o primeiro objeto reconhecido como fractal, na época, considerado um dos “monstros matemáticos”. (BARBOSA, 2005). Para Janos (2008, p.1), “Este conjunto representa também um modelo de imaginação e abstração da Matemática”. Então o que na verdade caracteriza o Conjunto de Cantor, “é o conjunto de pontos que permanecem após as infinitas fases” (BARBOSA, 2005, p. 26). Para construção geométrica do Conjunto de Cantor: (BARBOSA, 2005, p. 25), inicialmente considera-se um segmento de reta, na sequência divide-se este segmento em três partes de medidas iguais, eliminando a parte central, Essa operação, repete-se sucessivamente e indefinidamente em cada segmento restante.

A Figura 1 representa o “Conjunto de Cantor”, na figura a espessura do segmento foi aumentada para facilitar a visualização.

Figura 1 - Conjunto de Cantor
Fonte: Fractovia

Barbosa (2005) apresenta também como precursor dos trabalhos de Mandelbrot em relação à Geometria Fractal, o matemático, Giusepe Peano, italiano, nasceu em Cuneo (1858) e faleceu em Turim em (1932). Foi professor da Academia Militar de Turim e é o responsável pela axiomatização dos números inteiros (positivos). Seus trabalhos, utilizando notações e o rigor da lógica, surpreenderam os matemáticos contemporâneos. Segundo Barbosa (2005), em 1890, tratando do aprofundamento das noções de continuidade e dimensão, Peano publica sua famosa curva, também considerada "monstro matemático". Na construção da "Curva de Peano", iniciamos com um segmento de reta; substituímos por uma curva de nove segmentos, conforme indicado na Figura 2, portanto em escala 1/3. Na sequência substituímos cada segmento anterior pela curva de nove segmentos, e assim sucessivamente até cobrir totalmente uma superfície quadrangular.

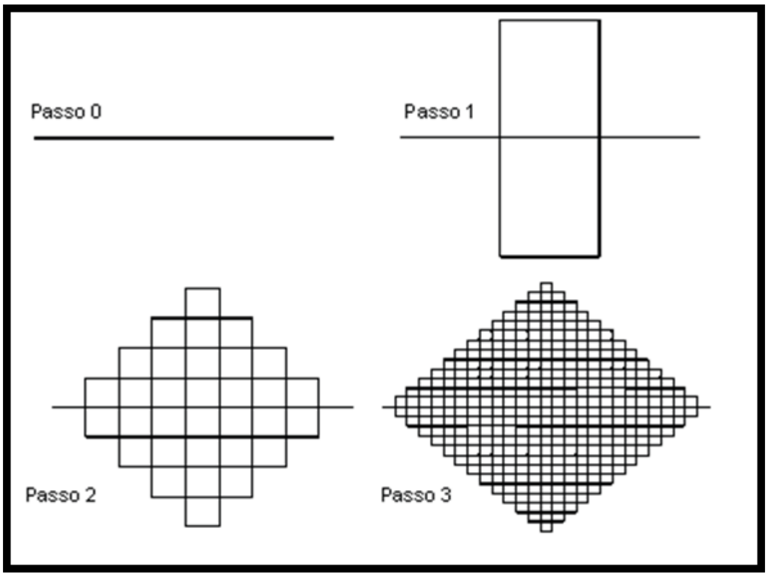


Figura 2 - Curva de Peano
Fonte: Natcomp (2012)

Outro matemático cujos trabalhos também tiveram uma grande influência no desenvolvimento da Geometria Fractal, segundo Barbosa (2005) foi o matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969), professor em Lvov e Wariaw, na década de 1920-1930, destacou-se em seus estudos, a ponto de uma das crateras lunares receber o seu nome. Em 1916, apresentou um dos famosos "monstros" que conhecemos por Triângulo de Sierpinski. A construção do Triângulo de Sierpinski, parte inicialmente de um triângulo equilátero em seguida este triângulo é dividido em quatro triângulos equiláteros a partir de segmentos traçados unindo os pontos médio de seus lados, essa operação repete-se sucessivamente nos triângulo encontrados, exceto no triângulo central que deve-se eliminar (remover), o que no desenho, pode ser codificado colorindo com uma única cor. A Figura 3, a seguir, destaca o Triângulo de Sierpinski nas seis primeiras iterações.

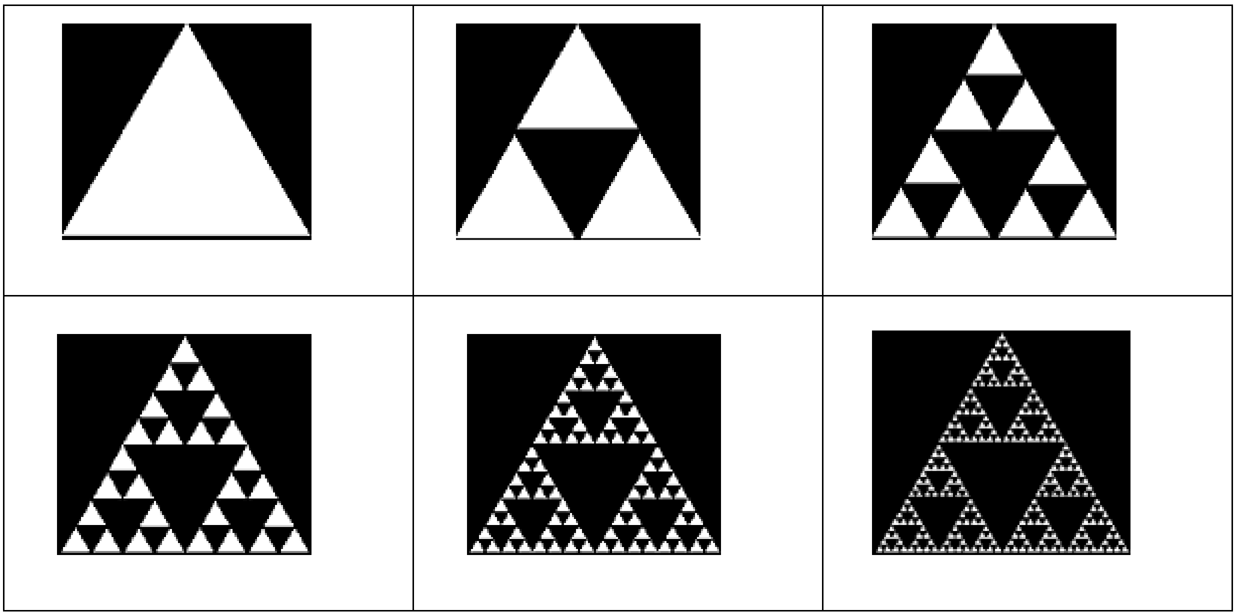


Figura 3 - Triângulo de Sierpinski
Fonte: Fractovia (2012)

Capra (1996, p.119) apresenta uma das formas fractais mais simples geradas pela iteração, isto é, a repetição incessante de certa operação geométrica, é a chamada de “Curva de Koch” ou “Curva do Floco de Neve”. Helge Von Koch, matemático polonês, em 1904 e 1906 introduziu esta curva que recebe seu nome. Na curva “a operação geométrica consiste em dividir uma linha em três partes iguais e substituir a seção central por dois lados de um triângulo equilátero, repetindo muitas vezes, e em escalas cada vez menores, é criada uma Curva de Floco de Neve denteada”. (CAPRA, 1996, p. 120). Na Figura 4 observa-se o fractal Curva de Koch e o aspecto da curva após diversas iterações.

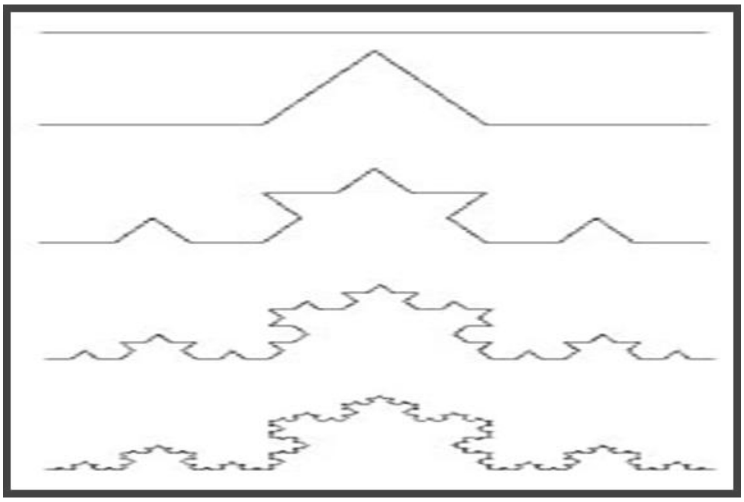


Figura 4 - Curva de Koch
Fonte: Com Ciência (2008)

Influenciado pelos trabalhos destes matemáticos, em 1970 Benoit Mandelbrot publicou o livro “The Fractal Geometry of Nature” no qual introduz o termo “fractal”, que segundo Barbosa (2005), tem sua origem no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo correspondente fragere, significa quebrar: criar fragmentos irregulares, fragmentar. Assim utilizou-se o termo Fractal para denominar as figuras que representam aspectos da natureza, que na geometria tradicional não era possível representar, o fractal Curva de Koch representa uma linha costeira.

> A maior parte da natureza é muito, muito complicada. Como se poderia descrever uma nuvem? Uma nuvem não é uma esfera... É como uma bola, porém muito irregular. Uma montanha? Uma montanha não é um cone [...]. Se você falar de nuvens, de montanhas, de rios de relâmpagos, a linguagem geométrica aprendida na escola é inadequada (MANDELBROT apud CAPRA, 1996, p. 118).

Para representar formas semelhantes às existentes na natureza, Mandelbrot criou a Geometria Fractal. O termo fractal foi criado para designar um objeto geométrico que nunca perde a sua estrutura, qualquer que seja à distância de visão.

Vale observar que nem tudo na natureza é Fractal, como salienta Alves (2007, p. 141), “uma gota de água ou uma porção de água parada não são fractais, mas a ondas do oceano e as correntes e percurso dos rios são, muitas vezes fractais”.

Benoit Mandelbrot, segundo Barbosa (2005), é considerado o “Pai da Geometria Fractal” e hoje se entende por Geometria Fractal um ramo da Matemática que estuda os Fractais, considerada uma Geometria não Euclidiana, pois nenhum dos cinco postulados de Euclides é satisfeito.

Utilizando um sistema de duas equações Mandelbrot em 1970, criou o seu mais famoso Fractal, dando origem a essa recente geometria chamada Geometria Fractal. O Fractal de Mandelbrot foi reconhecido como o mais complexo objeto da matemática, “em seu interior, infinitas regiões podem ser observadas” (JANOS, 2008). A Figura 5 destaca este fractal em diferentes escalas.

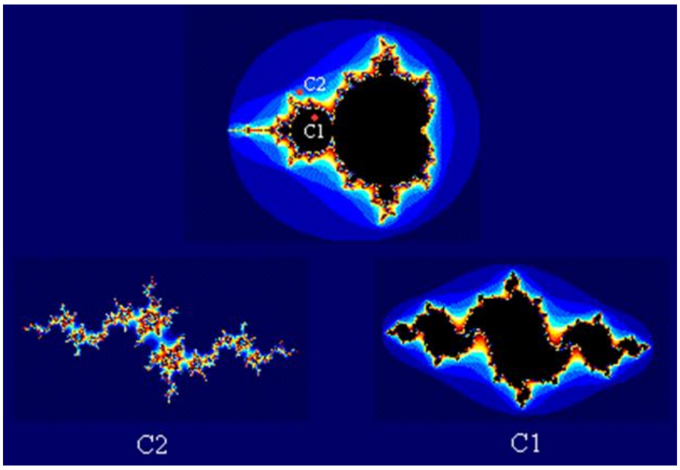


Figura 5 - Fractais de Mandelbrot
Fonte: Ultra Fractal (2012)

Segundo Capra (1996) o conjunto de Mandelbrot é o único, embora as regras (fórmulas) para a sua construção sejam simples, a variedade e a complexidade que ela revela são inacreditáveis. Para Janos (2008) “o Fractal de Mandelbrot é, sem dúvida, um dos objetos mais intricados que conhecemos”. A função interativa que gera o Fractal de Mandelbrot usa um sistema de duas equações:

$$x_{n-1} = x_n^2 - y_n^2 + a$$

$$y_{n-1} = 2x_n y_n + b$$

Na construção do Fractal de Mandelbrot, usam-se as equações como uma “máquina de transportar” pontos (Janos, 2008), sendo que cada ponto é obtido do anterior e como todo fractal, a última imagem gerada é composta pelos pontos da última iteração. Para iniciar a construção, define-se um ponto inicial (x_0, y_0) de onde partir. Os valores de *a* e *b* determinam a que distância e em que direção será colocada o próximo ponto.

2.2.1 Características dos Fractais

Um fractal é definido por três características básicas, a auto-similaridade, a complexidade infinita (iteração) e a dimensão fracionária.

Auto-similaridade

Segundo Carvalho (2005) auto-similaridade ou auto-semelhança é a mais elementar e marcante das características dos fractais, significa que cada parte em escala menor é exatamente igual ou semelhante à parte inicial, isto é, cada parte ampliada da imagem será igual a da inicial. “Auto-similaridade é que seus padrões característicos são repetidamente encontrados em escala descendente, de modo que suas partes, em escalas menores, em qualquer escala, são, na forma, semelhantes ao todo” (CAPRA, 1996, p. 118). Existem dois tipos de auto-semelhança: exata e a aproximada ou estatística.

Ainda segundo (CAPRA, 1996) a auto-semelhança exata significa que, mesmo ampliado várias vezes, cada parte é idêntica à original, não importando quantas vezes seja ampliado.

A auto-semelhança estatística significa que o objeto ampliado várias vezes não será igual ao inicial, será apenas semelhante. O fractal possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. Para Janos (2008, p. 35):

> O que existe nas figuras da natureza é uma auto-semelhança aproximada em diferentes escalas. Essa auto-semelhança aproximada é chamada de auto-semelhança estatística, porque, em diferentes escalas, essa auto-semelhança existe em média. Nos fractais matemáticos, as partes são cópias exatas do todo, mas nos fractais naturais as partes são apenas reminiscências do todo.

Os fractais que apresentam a característica da auto-semelhança exata são aqueles construídos a partir de figuras geométricas os chamados Fractais Geométricos: Curva de Koch, triângulo de Sierpinski, enquanto que, os fractais encontrados na natureza, os Fractais Naturais, couve-flor, gengibre, nuvens apresentam uma auto- semelhança estatística, pois as partes são semelhantes em média ao todo, isto é, as partes em escalas menores, são apenas parecidas com o todo.

Complexidade Infinita ou Iteração

Esta característica se relaciona à existência de um processo recursivo, o que significa que uma determinada operação repete-se infinitamente, de acordo com esta propriedade, cada fractal em sua construção dispõe de um número infinito de procedimentos, resultando em uma estrutura complexa. “A técnica principal para se construir um fractal é a iteração – isto é, a repetição incessante de certa operação geométrica”. (CAPRA, 1996, p. 119).

O processo de repetição com iterações infinitas realmente se efetivou com o desenvolvimento de *softwares* matemáticos, pois manualmente a divisão em escalas menores é limitada.

Com a ajuda de computadores, as iterações geométricas simples podem ser aplicadas milhares de vezes em diferentes escalas, para produzir os assim chamados forjamentos (*forgeries*) fractais–modelos, gerados por computador, de plantas, árvores, montanhas, linhas litorâneas e tudo aquilo que manifeste uma semelhança espantosa com formas reais encontrada na natureza (CAPRA, 1996, p. 120).

A Geometria Fractal teve grande destaque após o desenvolvimento e aprimoramento da informática e tem revelado várias aplicações, como nos exemplos, citado por (TRATCH, 2008), na Biologia, auxilia a compreensão do crescimento das plantas, na Medicina, possibilita uma visão anatômica do corpo internamente a estruturação de alguns órgãos e no diagnóstico de alguns tipos de câncer, na Engenharia eletrônica permite a análise de ruídos nas comunicações telefônicas, segundo Barbosa (2005) Mandelbrot na IBM, deparou-se com problemas de ruídos nas linhas telefônicas, a aleatoriedade e irregularidade dos ruídos afastavam os engenheiros da busca de soluções. Empregando o trabalho de Cantor resolveu o problema, pensando nos erros de transmissão como um desses conjuntos que alguns ruídos não podiam ser eliminados.

A Dimensão Fractal

A dimensão da Geometria Fractal, diferente da dimensão da Geometria Euclidiana, é um número fracionário, para Barbosa (2005) “É um novo tipo de dimensão denominada dimensão fractal, associada à aspereza, espessura, densidade, textura etc”.

Na Geometria Euclidiana, segundo Tratch (2008), “a dimensão de um objeto está relacionado ao espaço, no qual o objeto está inserido e indica como o objeto é medido” sabemos que, um ponto tem dimensão zero, não tem nem largura nem comprimento; uma reta tem dimensão um, uma figura plana tem dimensão dois e o espaço que vivemos tem dimensão três.

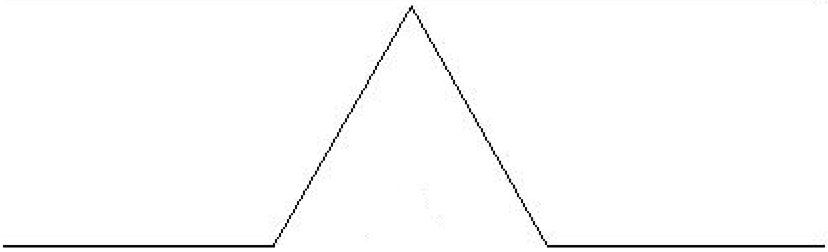
A dimensão fractal, segundo a mesma autora, “é expressa geralmente por um valor não inteiro e está relacionada com sua estrutura, seu comportamento e seu grau de irregularidade” (TRATCH, 2008, p. 18). Mas como medir o litoral da Inglaterra? Como caracterizar o “denteamento” do litoral?

> Madelbrot acentuou essa característica das formas fractais, mostrando que desde que o comprimento medido pode ser indefinidamente estendido se nos dirigimos para escalas cada vez menores, não há uma resposta para essa pergunta. No entanto, é possível definir um número entre 1 e 2 que caracterize o “denteamento” do litoral... Uma linha denteada em um plano preenche mais espaço do que uma linha reta, que tem dimensão 1, porém menos do que o plano, que tem dimensão 2. (CAPRA, 1996, p. 118).

Barbosa (2005), define Dimensão Fractal, demonstrando a equação para o seu cálculo a partir da comparação com objetos de 1, 2 e 3 dimensões, repartindo-os em objetos auto-similares, determinando assim a fórmula para o cálculo da Dimensão Fractal: $D = \frac{\log m}{\log n}$

Nesta fórmula “m”, corresponde ao número de segmentos semelhantes e “n” representa o fator de escala, isto é, a razão de semelhança.

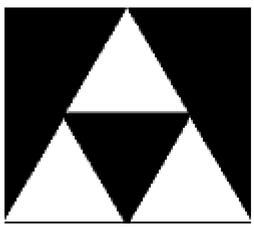
Para ilustrar vamos considerar o Fractal Geométrico Curva de Koch, e determinar a sua dimensão, utilizando a fórmula apresentada por Barbosa (2005), quadro 2 a seguir.

 Curva de Koch (1º Nível) onde, m = 4 e n = 3	$D = \frac{\log 4}{\log 3}$ Aproximadamente $D = \frac{0{,}60206}{0{,}47712}$ D = 1.262

Quadro 2 - Cálculo da dimensão fractal da Curva de Koch
Fonte: Autoria própria

Este conceito de dimensão fractal, segundo Capra (1996), inicialmente foi uma ideia matemática abstrata, no entanto, tornou-se uma poderosa ferramenta para as análises da complexidade das formas fractais. Quanto mais denteados forem os objetos naturais, contornos de um relâmpago ou nuvens mais altas serão suas dimensões fractais, fracionárias em um intervalo de zero a três. Isso significa, por exemplo, que a Curva de Koch, dimensão 1.262, está situada entre o espaço unidimensional (maior que uma linha reta) e o bidimensional (menor que uma figura plana).

No cálculo da Dimensão Fractal do Triângulo de Sierpinski, vamos utilizar como referência o fractal no 2º nível, na segunda iteração. Quadro 3 a seguir.

 Triângulo de Sierpinski (2º Nível) onde, m =2 e n = 3	$D = \frac{\log m}{\log n} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\log 3}{\log 2}$ Aproximadamente $D = \frac{0{,}47}{0{,}30}$ D = 1,585

Quadro 3 - Cálculo da dimensão fractal do Triângulo de Sierpinski
Fonte: Autoria própria

Na interpretação da dimensão do fractal Triângulo de Sierpinski, o valor 1,585 significa que o fractal tem dimensão maior que um segmento de reta e menor que de uma figura plana, cuja dimensão é 2.

Janos (2008, p. 74) apresenta um exemplo de um objeto na dimensão entre os espaços bidimensional e tridimensional: “pegue uma folha de papel 5x10cm e amasse-a até formar uma bola de papel. Esta bola de papel tem dimensão entre 2 e 3. A tentativa de construir objetos de 3 dimensões a partir de objetos de 2 dimensões produz estruturas fractais quebradiças com espaços vazios irregulares como a bola de papel”. Uma curva quanto mais “denteada” for mais próxima de dois será a sua dimensão, e quanto menos amassada for a “bola de papel” mais próxima de dois será a sua dimensão.

2.2.2 Classificação dos Fractais

Os fractais, segundo Menezes (2003), apresentam duas categorias: os geométricos (determinísticos) e os não-lineares (Aleatórios e da Natureza).

Geometria Fractal da natureza são elementos da natureza que possuem a característica da auto-similaridade, observada por Madelbrot, isto é cada parte, em escala menor é semelhante ao todo. São considerados fractais da natureza; nuvens, algumas rochas, couve-flor, árvores e o brócolis. Como se pode observar na figura 6.

Figura 6 - Fractal da natureza – brócolis
Fonte: Com Ciência (2008)

Os Fractais Geométricos caracterizam-se pelos modelos fractais construídos a partir de figuras geométricas, repetem padrões continuamente. Como exemplo de Fractais Geométricos tem-se: A Curva de Koch, o Triângulo e o Tapete de

Sierpinski, a Esponja de Menger. Em destaque, um modelo de Fractal Geométrico na figura 7 o Tapete de Sierpinski.

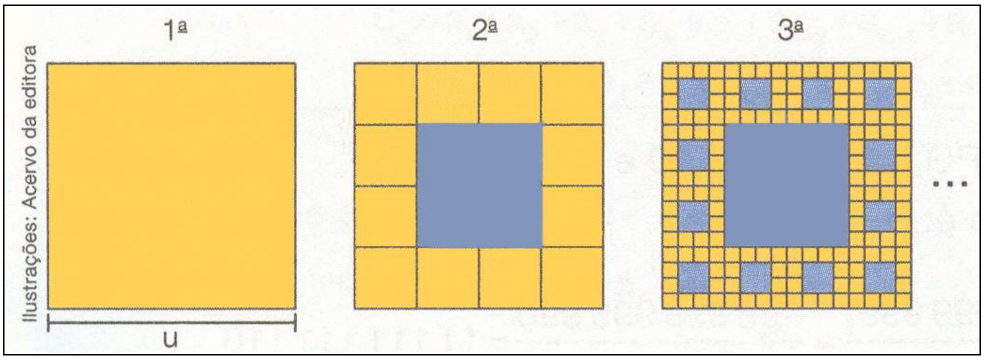


Figura 7 - Tapete de Sierpinki
Fonte: Souza (2010)

Os Fractais Aleatórios são os fractais construídos a partir da geometria dinâmica, na qual as iterações podem ser repetidas uma infinidade de vezes, resultando em belíssimas figuras. "São construídos por meio de funções iterativas complexas, geralmente com o auxílio de programas computacionais específicos. São simétricos na escala, mas a transformação não é previsível". (TRATCH, 2008). Um modelo de fractal aleatório (Figura 8).

Figura 8 - Fractal Aleatório
Fonte: Ultra Fractal (2012)

2.3 O ENSINO DE GEOMETRIA

No Brasil nos últimos anos com as reformas nas leis que organizam o ensino, verificou-se uma crescente onda de resgate do ensino de Geometria, conteúdo este, esquecido, devido à grande valorização dos conceitos algébricos, resultado do Movimento da Matemática Moderna. Autores como Pavanello (1993) Lorenzato (1995) apontam para o esvaziamento dos conteúdos de geometria no ensino de Matemática, identificando como possíveis causas a formação do professor, o currículo e até mesmo o Livro didático.

Lorenzato (1995, p. 06) reforça essa ideia, afirmando que:

> São inúmeras as causas, porém, duas delas estão atuando forte e diretamente em sala de aula: a primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas. A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que entre nós, desempenha o livro didático (LORENZATO, 1995, p.06).

Assim, a partir da década de 90, influenciados pelas novas concepções a respeito da construção do conhecimento e da difusão dos trabalhos de Piaget, Vygotsky e Vergnaud, surgem discussões acerca da importância do conhecimento geométrico e busca-se o seu resgate. “Sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver situações de vida que forem geometrizadas..." (LORENZATO, 1995, p. 5). Fainquelernt também enfatiza a importância do estudo de geometria, quando afirma:

> O estudo da Geometria é de fundamental importância para desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para a leitura do mundo e para que a visão da Matemática não fique distorcida. Essas razões são suficientes para que o ensino de Geometria no 1º grau não seja desenvolvido através de automatismo, memorização e técnicas operatórias nem baseado em um processo de formalização com crescente nível de rigor, abstração e generalização. (FAINQUELERNT, 1999. p.53)

Tendo em vista, a importância que estudo de geometria exerce na vida das pessoas, na elaboração de um documento curricular, precisa-se priorizar o seu ensino e também investir fortemente em cursos de formação continuada para os professores, que foram fragilizados com a ausência desses conteúdos em seus cursos.

Assim, os documentos que orientam o ensino de Matemática: Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE), comprovam essa tentativa de resgate do ensino de geometria, abordando a importância do seu ensino.

Os PCN (BRASIL, 2001) no seu bloco Espaço e *Forma* enfatizam: "Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive".

As Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE) do Paraná, cujas discussões se iniciaram em 2003, trazem a importância do estudo de geometria, (PARANÁ, 2008) "para que o aluno se aproprie do conhecimento de forma que compreenda os conceitos e princípios matemáticos, claramente e comunique ideias, reconheça suas aplicações e aborde problemas matemáticos com segurança".

Abordar o conteúdo de geometria de forma que tenha significado para o aluno, também é evidenciado no, Guia do Livro Didático, documento de orientação aos professores na escolha do livro didático no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) lançado pelo MEC, na edição de 2007, em seu texto afirma, em relação as 16 obras aprovadas no PNLD/2008:

> A capacidade de visualizar é fundamental na geometria, tanto no sentido de captar e interpretar as informações visuais, como no de expressar as imagens mentais por meio de representações, gráficas ou não. O trabalho com diversas formas de representação gráfica é feito em parte das obras, na maioria das obras ainda persiste uma atenção exagerada às classificações e à nomenclatura (GUIA DO LIVRO DIDÁTICO, 2007, p.44-45).

Portanto, priorizar no ensino de matemática na educação básica os conceitos de Geometria é contribuir com o aluno para que ele amplie o seu horizonte de conhecimento, pois o meio em que vivemos está mais próximo dos conceitos das geometrias não euclidianas. Cruz (2008) confirma esta necessidade:

> É necessário discutir com os alunos que a perfeição dos espaços geográficos é consequência da atividade humana, sendo que, em muitos espaços onde vivemos nos deparamos com situações que fogem das alterações proferidas pelas pessoas e, portanto, foge aos conceitos de geometria plana, uma geometria Euclidiana. É coerente, do ponto de vista da aprendizagem matemática, explorar os conceitos de Geometria Não Euclidiana. (CRUZ, 2008, p.4)

Questões como estas que mostram a importância do ensino de geometria, tendo em vista, a ampliação do universo de conhecimento do aluno, permearam as discussões entre os professores, no momento da elaboração das Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática do estado do Paraná, optando assim por incluir seus conceitos no documento.

2.4 AS DIRETRIZES CURRICULARES ESTADUAIS DE MATEMÁTICA E O ENSINO DE GEOMETRIA FRACTAL

A partir da discussão curricular desenvolvida pela Secretaria Estadual de Educação do estado do Paraná em 2003, no processo da elaboração da Diretriz Curricular, especificamente sobre o ensino de Geometria, optou-se pela inclusão do conteúdo Geometria Fractal a ser abordada, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio.

Para entender os motivos que levaram à inclusão do ensino da Geometria Fractal, como conteúdo da Educação Básica, que caracteriza um avanço na educação, é necessário rever como o ensino de Matemática foi e é organizado na rede estadual de ensino e quais os documentos que nos últimos anos orientaram o ensino no Paraná.

Pensar nos documentos curriculares que orientam o ensino é necessário que inicialmente se entenda: O que é currículo? O que ele representa no espaço escolar? O termo muitas vezes é utilizado para se referir apenas ao rol de conteúdos de cada disciplina, no entanto, seu significado é muito maior. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) currículo é compreendido como:

> Currículo pode significar a expressão de princípios e metas de projeto educativo, precisam ser flexíveis para promover discussões e reelaborações quando realizados em sala de aula, pois é o professor que traduz os princípios elencados em ordem didática. (BRASIL, 1998, p. 49).

Ainda nos PCN (BRASIL, 1998), “currículo é a expressão dinâmica do conceito que a escola e o sistema de ensino têm sobre o desenvolvimento dos seus alunos e que se propõe a realizar com eles”. Estes significados atribuídos ao currículo ressaltam que é na escola que o currículo se constrói, “O currículo como configurador da prática, produto de ampla discussão entre sujeitos da educação, fundamentado nas teorias críticas e com organização disciplinar” (PARANÁ, 2008, p. 19) é nesta concepção que as DCE do Estado do Paraná se firmaram na sua elaboração.

No final da década de 1980, o Estado do Paraná, através da Secretaria de Estado da Educação, produziu um documento de referência curricular para a sua rede pública de Ensino Fundamental, denominado Currículo Básico. Na sua fundamentação, apontava para a Pedagogia Histórico-Crítica, que “busca construir um sujeito epistêmico, que atue na sociedade de forma crítica e reflexiva” (PARANÁ, 1990, p. 66). Este documento já pontuava questões da Educação Matemática, cujas ideias começavam a se firmar no Brasil.

Com a aprovação da Lei das Diretrizes e Base (LDB n. 9394), em dezembro de 1996, que definiram aspectos curriculares, tanto na oferta das disciplinas que compõem a parte diversificada quanto no elenco dos conteúdos das disciplinas da base nacional comum (art.26, LDB), e dava autonomia às escolas na elaboração de suas grades curriculares. Desencadeou no Estado do Paraná, um abandono do documento Currículo Básico elaborado no final da década de 80.

Nesse sentido, a partir de uma leitura conveniente da LDB, a disciplina de Matemática na grade curricular das escolas foi dividida, sendo criadas diferentes disciplinas para a parte diversificada relativa ao ensino de Matemática, tais como: Geometria, Desenho Geométrico, Álgebra, Matemática Básica, entre outras, que abordavam os campos de conhecimento da Matemática, mas enfraqueciam-na como disciplina.

No final da década de 90, com a distribuição dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que visavam à construção de um referencial que orientasse a prática escolar, na elaboração de suas propostas pedagógicas, para o Ensino Médio apenas orientavam as práticas docentes para o desenvolvimento de competências e habilidades, com temas transversais, isto é, “no processo de ensino enfatizou o uso da matemática para resolver problemas locais, não priorizando o conhecimento matemático historicamente produzido” (PARANÁ, 2008).

No sentido de identificar como as escolas implementavam os PCN nas suas propostas pedagógicas, no início de 2003, a Superintendência da Educação da Secretaria Estadual de Educação do Paraná, realizou um diagnóstico o qual revelou que nas escolas do Estado havia uma indefinição na proposta pedagógica, tendo em vista as diferentes leituras dos documentos que orientavam o ensino. (PARANÁ, 2008).

Em virtude desse fato, a partir de 2003, no Paraná, a equipe da Secretaria Estadual de Educação estabeleceu como prioridade: construir um documento de orientação pedagógica, visando além de uma definição de proposta pedagógica, a melhoria da qualidade do ensino no Estado. (PARANÁ, 2008).

Assim, em março de 2004, iniciou-se um processo de formação continuada com discussões coletivas com todos os seguimentos da educação estadual, professores atuantes em diferentes níveis e modalidades de ensino, educadores dos Núcleos Regionais de Educação e das Equipes Pedagógicas da Secretaria de Estado da Educação reuniram-se tendo em vista a elaboração de um documento que orientasse o ensino no Paraná. As equipes pedagógicas dos 32 Núcleos Regionais de Educação instituíram os chamados, Grupos de Trabalho (GT), no sentido de descentralizar o trabalho, assim, em cada região do estado foram realizados seminários estaduais com os temas: “O valor educativo da Matemática”; “Relação professor-aluno”; “Relação ensino-aprendizagem”; “Avaliação”; “O papel do professor de Matemática”, no sentido de definir uma proposta curricular que, ao mesmo tempo valorizasse a matemática como saber científico e também contemplasse a cultura regional.

O processo coletivo para a elaboração das DCE, com a participação dos professores não é aceita totalmente, autores como Caldatto (2011) e Branco (2011), discordam deste fato. Branco (2011), citada por Caldatto (2011) confirma sua opinião:

> Na verdade, o documento final é muito mais fruto de uma discussão interna, de uma relação de poder, de conflitos de ego, do que uma discussão coletiva com os professores da rede. Dessa forma, podemos dizer que essa versão final tem muito pouco da cara do ensino fundamental, da demanda do ensino fundamental, dos anseios apresentados pelos professores do fundamental. Eles talvez se enxerguem por terem visto algo parecido, termos parecidos com o que está no texto em algum momento, mas não de fato pela discussão que fizeram sobre o termo. (BRANCO, 2011).

No entanto, o professor Carlos Petronzelli no mesmo texto de Caldatto (2011), sistematiza como foi o trabalho para a elaboração das DCE no Paraná e reforça a participação de todos os segmentos da educação.

> Formaram-se grupos de professores de cada área em cada núcleo, e a discussão se deram em um primeiro momento no núcleo, progressivamente, esses grupos iam para Curitiba ou Faxinal do Céu, e posteriormente repassavam o que havia sido desenvolvido nos encontros com a SEED aos seus pares, ou seja, aos demais professores da rede do núcleo que não haviam ido aos encontros. E todos os passos desse processo se davam segundo alguns critérios estabelecidos pela SEED, então as ações tinham uma amplitude imensa, formavam-se gigantescos grupos e isso foi indo, com várias idas e vindas, e agregada a essas idas e vindas tinham as várias versões do documento. (PETRONZELLI, 2011 apud CALDATTO, 2011).

Petronzelli (2011), professor da Universidade Federal do Paraná, participou do grupo que em 2003 iniciou as discussões para a elaboração das DCE e afirma a sua construção coletiva.

> Se considerarmos a dinâmica que a secretaria deu, em cima dos autores pós-modernos que de certa forma centralizou e fez da ação do professor no dia a dia o caminho, o meio, e o fim, então eu diria que as DCEs são a cara do professor, porque na Matemática e nas outras áreas o conhecimento teria que ser o reflexo da prática desse professor, se não, você não responde por essa ação descentralizada que é caracterizada pela participação do professor. (PETRONZELLI, 2011).

Este trabalho apontado pelo professor Petronzelli, resultou no documento denominado Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática (DCE), distribuídos aos professores em 2008 que se apresenta dividido em duas partes. Na primeira parte discorre sobre a Educação Básica e a Opção pelo Currículo Disciplinar; na qual contempla:

1.Os sujeitos da Educação Básica: neste item são apontados às características dos sujeitos da escola pública, e qual a formação que se quer proporcionar a esses sujeitos, tendo em vista “a escola contribuir para determinar o tipo de participação que lhe caberá na sociedade” (PARANÁ, 2008, p. 14).

2.Fundamentos Teóricos: contempla as concepções de currículo e a justificativa da opção de um currículo como configurador da prática, vinculado às teorias críticas, com organização disciplinar e com metodologias que priorizem diferentes formas de ensinar, de aprender e de avaliar.

> Embora se compreendam as disciplinas escolares como indispensáveis no processo de socialização e sistematização dos conhecimentos, não se pode conceber esses conhecimentos restritos aos limites disciplinares, assim as relações interdisciplinares, são entendidas como necessárias para a compreensão da totalidade. (PARANÁ, 2008, p. 20).

3.Dimensões do Conhecimento: O conhecimento e as disciplinas curriculares; A interdisciplinaridade e a Contextualização Sócio-Histórica;

4.Avaliação: Este item contempla as perspectivas da avaliação para a Educação Básica, enfatizando o papel da escola no sentido de “formar sujeitos que construam sentido para o mundo que compreendam criticamente o contexto social e históricos que são frutos” (PARANÁ,2008, p.31).

A segunda parte do documento contém o texto das Diretrizes Curriculares da Disciplina da Matemática, está assim distribuído:

1.Dimensão Histórica da Disciplina: O texto apresenta o desenvolvimento da Matemática desde suas origens até a sua constituição como disciplina no currículo escolar brasileiro e as tendências pedagógicas que influenciaram o ensino de Matemática em nosso país.

2.Fundamentos Teórico-Metodológicos: Este item aponta a importância do professor refletir sobre a sua concepção de Matemática enquanto campo de conhecimento, destacando a Educação Matemática com campo de estudos que possibilita o professor balizar sua ação docente.

3.Conteúdos Estruturantes: Neste documento os campos de estudos da Matemática foram distribuídos em: Números e Álgebra; Grandezas e Medidas; Geometrias; Funções e Tratamento da Informação;

4.Encaminhamentos Metodológicos: Apresenta a proposta de encaminhamento metodológico das DCE, enfatizando que o trabalho do professor ao trabalhar os conteúdos precisa articular os Conteúdos Estruturantes com os conteúdos específicos visando abandonar as abordagens fragmentadas, e os conteúdos devem ser abordados por meio das tendências metodológicas da Educação Matemática.

5.Avaliação: Neste item o documento aponta as formas de avaliar em Matemática, tendo em vista superar a prática historicamente marcada pela pedagogia do exame, neste sentido, propõe que a avaliação deve acontecer ao longo do processo de ensino aprendizagem e que considerem a relação do aluno com o conhecimento e a compreensão alcançada por ele.

Finalizando o caderno das DCE, (PARANÁ, 2008), são apresentadas as referências bibliográficas que fundamentaram o texto e anexo ao documento, por solicitação dos professores da rede, foram pontuados os conteúdos básicos da disciplina de Matemática distribuídos nas diferentes séries da Educação Básica.

O texto das DCE (2008) aponta importantes considerações teórico-metodológicas para o ensino da matemática. Prioriza um ensino que seja (PARANÁ, 2008, p. 48)

> Diferente daquele proveniente do ensino clássico que privilegiava métodos puramente sintéticos, cuja premissa pautava o rigor das demonstrações. Também sugerem um ensino que possibilitem aos estudantes realizarem análises, discussões, conjecturas, apropriações de conceitos e formulação de ideias. (PARANÁ, 2008, p. 48).

Este documento considera as Geometrias como Conteúdo Estruturante, ou seja, são conhecimentos de grande amplitude, os conceitos e as práticas que identificam e organizam os campos de estudos de uma disciplina.

Para o Ensino Fundamental e Médio, o Conteúdo Estruturante Geometrias se divide nos conteúdos específicos: Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica e noções básicas de Geometrias Não Euclidianas.

Por solicitação dos professores durante as discussões para elaboração das diretrizes, como anexo ao documento das DCE de Matemática, encontra-se um quadro que apresenta a sistematização dos conteúdos básicos para a o ensino de Matemática na Educação Básica, indicando os conteúdos divididos por séries.

> Entende-se por conteúdos básicos os conhecimentos fundamentais para cada série da etapa final do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, considerados imprescindíveis para a formação conceitual dos estudantes nas diversas disciplinas da Educação Básica. O acesso a esses conhecimentos é direito do aluno na fase de escolarização em que se encontra e o trabalho pedagógico com tais conteúdos é responsabilidade do professor (PARANÁ, 2008, p.76).

O conteúdo Geometria para o Ensino Médio traz como objetivos de aprendizagem: perceber a necessidade das geometrias não euclidianas para a compreensão dos conceitos geométricos, quando analisados em planos diferentes do de Euclides; compreender a necessidade das geometrias não euclidianas para o avanço das teorias científicas; articular ideias geométricas em planos de curvatura nula, positiva e negativa; conhecer os conceitos básicos da Geometria Elíptica (geometria da superfície esférica), hiperbólica e Fractal (PARANÁ, 2008, p. 80).

Em relação à Geometria Fractal, foco deste trabalho, as DCE orientam:

> Na geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e Tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, entendendo suas propriedades (PARANÁ, 2008, p.57).

E o professor, que praticamente tem como única fonte de pesquisa para a elaboração de sua prática pedagógica o livro didático, terá subsídios elaborar o seu Plano de Trabalho Docente (PTD), visando a abordar a Geometria Fractal, em sala de aula? E os livros didáticos adotados nas escolas como apresentam este tema?

Contribuições para o desenvolvimento da Geometria Fractal em sala de aula

Vários pesquisadores em Educação Matemática desenvolveram trabalhos envolvendo a Geometria Fractal destacando a importância de abordar este tema e que podem também fundamentar o professor em atividades na sala de aula. Entre eles:

Ruy M Barbosa (2005), em seu livro "Descobrindo a Geometria Fractal para sala de aula", apresenta atividades para o desenvolvimento dos conceitos de Geometria Fractal em sala de aula. Neste livro o autor inclui a criação e exploração de fractais, a manipulação de materiais concretos e a utilização de recursos computacionais com softwares educacionais como: Nfract, Slogow, Cabri-geometre, entre outros. Apresenta também comentários históricos em relação aos precursores de Mandelbrot nos estudos com os fractais, tornando o livro interessante e de fácil interpretação. Anexo ao livro é fornecido um CD para construção dos fractais de Mandelbrot e Julia. A leitura do livro e as construções apresentadas foram fatores indispensáveis ao desenvolvimento desta pesquisa, embora em nossa pesquisa optássemos em utilizar outro software, as construções em sala de aula foram baseadas nos trabalhos apresentado pelo autor.

Michel Janos (2006), em seu livro "Geometria Fractal" apresenta uma introdução a Geometria Fractal através dos fractais chamados "clássicos", aborda também como grande parte da natureza é fractal. Indica como construir fractais matematicamente e traz exemplos de "Arte Fractal" apresenta também programas específicos que geram fractais como o Fractint e Ultrafractal.

Raquel Sofia Rebelo Nunes, em sua dissertação, intitulada "Geometria Fractal e Aplicações" Nunes (2006), afirma, "A Geometria Fractal, quando inserida na área curricular de matemática no ensino básico, é um tema motivador e integrador de vários tópicos matemáticos" e complementa:" a exploração da Geometria Fractal, no contexto de sala de aula impulsiona a utilização da matemática na interpretação do real, reconhecendo formas e processos que envolvem conceitos matemáticos; promove a pesquisa de padrões e regularidade formulando em seguida generalização em situações diversas. Embora o trabalho de Nunes (2006), esteja no campo teórico da Geometria Fractal, sua leitura foi um suporte para o desenvolvimento da pesquisa, tendo em vista, que apresenta desde a percepção de infinito, passando pelos fractais clássicos, de Cantor, Koch, Sierpinski, Peano e Hilbert, fractais em sistemas dinâmicos, até as aplicações da Geometria Fractal na arte, medicina e computação.

Hamilton Cunha de Carvalho em sua dissertação "Geometria Fractal Perspectivas e possibilidades para o ensino de Matemática", (Carvalho, 2005) da Universidade Federal do Pará, apresenta uma pesquisa realizada com alunos do Ensino Médio, para os quais foi ministrado um curso sobre Geometria Fractal. Este curso consistia em uma parte teórica e algumas atividades selecionadas de forma que pudessem abranger tópicos da Matemática curricular. Para Carvalho (2005), A Geometria Fractal pode proporcionar aos alunos uma relação mais forte entre os saberes, e também uma visão dinâmica da Matemática.

2.5 A GEOMETRIA FRACTAL PRESENTE NOS LIVROS DIDÁTICOS

Estudos de educadores matemáticos, Kaleff (2007), Pais (1991), mostram que para muitos professores, e alguns alunos, o livro didático é o principal e, muitas vezes, a única fonte de consulta. Uma parcela significativa dos professores utiliza na preparação de suas aulas apenas o livro didático adotado na escola, até limitando o conteúdo abordado e a metodologia empregada ao proposto no livro. Como confirma Pais (1991, p. 1):

> O livro didático é um dos recursos quase sempre presente no ensino da matemática, onde funciona como fonte de referência para validação do saber escolar. Quer seja por parte de alunos ou de professores, constitui em uma importante fonte de informações para a elaboração de um tipo específico de conhecimento.

Considerando-se a importância que o livro didático assume no ensino, ao fazer a escolha, seria necessário, por parte dos professores, uma análise criteriosa, dos conteúdos abordados nos livros a serem adotados, buscando uma coerência com os conteúdos elencados nas DCE, fato que dificilmente acontece.

O Ministério da Educação (MEC), por meio do Fundo Nacional do Desenvolvimento Educacional (FNDE), executa programas voltados ao livro didático, um deles é PNLEM (Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio) que tem por objetivo prover as escolas das redes federal, estadual e municipal com obras didáticas de qualidade.

Os livros didáticos são distribuídos gratuitamente para os alunos de todas as séries da Educação Básica da rede púbica e, desde 2004, pela Resolução nº 38, o PNLEM, prevê a universalização do Livro Didático também para os alunos do ensino médio público do país. As principais ações na execução para efetivação do programa são: Inicialmente é enviado a todas as escolas públicas do país, o Guia do livro didático, o qual apresenta as resenhas dos livros aprovados por especialistas pedagógicos. Na sequência, nas escolas, diretores, professores e equipes pedagógicas escolhem em um processo democrático as obras que serão utilizadas pelos alunos por três anos consecutivos, beneficiando mais de um estudante nos anos subsequentes.

Em 2005, o FNDE distribuiu a primeira edição do programa PNLEM. O Paraná optou em não participar do programa nacional. Assim, por meio de um pregão eletrônico foi escolhido o livro didático de Matemática comum para todas as escolas da rede de ensino público estadual do Paraná. No entanto, em 2008, a opção foi participar do programa nacional. Assim, em agosto de 2008, em todas as escolas da rede estadual e federal do Paraná diretores, professores e equipes pedagógicas, analisaram e escolheram os livros didáticos que seriam utilizados pelos alunos nos três anos subsequentes, no triênio 2009-2011.

Em Ponta Grossa, no Paraná, e nos 11 municípios jurisdicionados ao Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa, os livros escolhidos foram: Matemática Completa[1] escolhido por 24 colégios; Matemática volume único[2] escolhido por 10 colégios; na sequência temos as coleções: Matemática aula por aula[3] escolhida por 10 colégios; a coleção Matemática[4] foi escolhida por 4 colégios; Matemática[5], 3 colégios, e Matemática e suas tecnologias[6], escolhido por apenas um colégio.

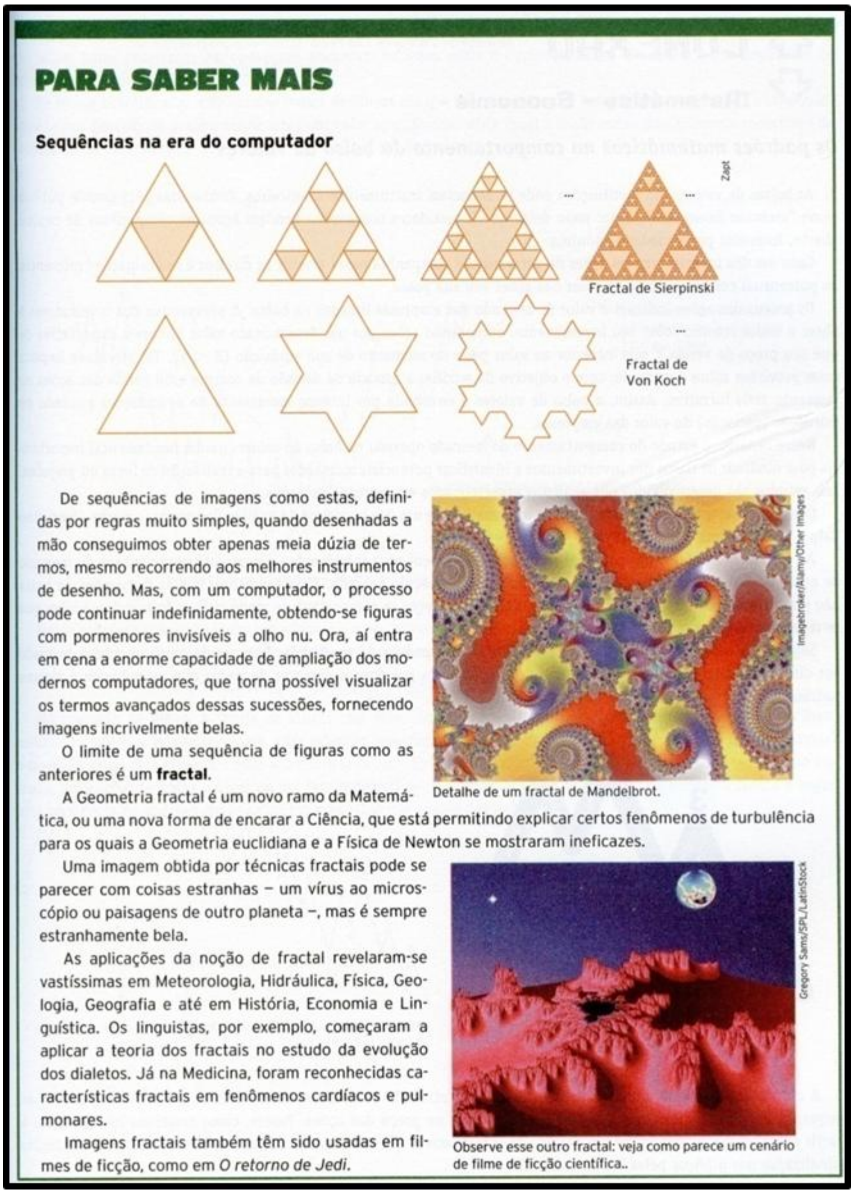
---

[1] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. Matemática completa. São Paulo: FTD, 2005.
[2] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática.** São Paulo: Ática, 2008.
[3] SILVA, Cláudio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. **Matemática:** aula por aula. São Paulo: FDT, 2005.
[4] SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática ensino médio.** São Paulo: Saraiva, 2007. (Saber matemática).
[5] PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática:** volume único. São Paulo: Moderna, 2005.
[6] RUBIÓ, Angel Panadés; FREITAS, Luciana Maris Tenuta de. **Matemática e suas tecnologias.** São Paulo: Ibep, 2005.

Em muitos desses livros que hoje estão nas escolas encontramos indicações à Geometria Fractal, que podem ser o ponto de partida para que o professor aborde este tema em sala de aula.

O livro “Matemática Ensino Médio”, Smole e Diniz (2007), apresenta uma seção denominada, “Para Saber Mais”, que segundo as autoras tem as funções: Destacar ideias ou propriedades que serão usadas no desenvolvimento do tema em estudos; mostrar outra abordagem do tema em estudo, por exemplo, a visão pela história da Matemática; trazer um novo conteúdo que permitirá melhor compreensão do tema em estudo; apresentar curiosidade ou aplicação do que está sendo estudado e gerar pesquisas, em grupo, além das aulas com o intuito de conseguir mais informações do que aquelas apresentadas pelo texto.

O livro do volume 1, Smole e Diniz (2007), indicado para a 1ª série do Ensino Médio, na página 169, apresenta um texto, com o título “Sequência na era do computador”, neste texto destaca a sequência da construção do Triângulo de Sierpinsk apontando que o processo pode continuar indefinidamente com o auxilio do computador, define Geometria Fractal e suas aplicações nas diferentes áreas. O Quadro 4 indica como as autoras apresentam a seção na edição de 2010.



PARA SABER MAIS

Sequências na era do computador

Zapt

Fractal de Sierpinski

Fractal de Von Koch

De sequências de imagens como estas, definidas por regras muito simples, quando desenhadas a mão conseguimos obter apenas meia dúzia de termos, mesmo recorrendo aos melhores instrumentos de desenho. Mas, com um computador, o processo pode continuar indefinidamente, obtendo-se figuras com pormenores invisíveis a olho nu. Ora, aí entra em cena a enorme capacidade de ampliação dos modernos computadores, que torna possível visualizar os termos avançados dessas sucessões, fornecendo imagens incrivelmente belas.

O limite de uma sequência de figuras como as anteriores é um **fractal**.

Imagebroker/Alamy/Other Images

Detalhe de um fractal de Mandelbrot.

A Geometria fractal é um novo ramo da Matemática, ou uma nova forma de encarar a Ciência, que está permitindo explicar certos fenômenos de turbulência para os quais a Geometria euclidiana e a Física de Newton se mostraram ineficazes.

Uma imagem obtida por técnicas fractais pode se parecer com coisas estranhas – um vírus ao microscópio ou paisagens de outro planeta –, mas é sempre estranhamente bela.

As aplicações da noção de fractal revelaram-se vastíssimas em Meteorologia, Hidráulica, Física, Geologia, Geografia e até em História, Economia e Linguística. Os linguistas, por exemplo, começaram a aplicar a teoria dos fractais no estudo da evolução dos dialetos. Já na Medicina, foram reconhecidas características fractais em fenômenos cardíacos e pulmonares.

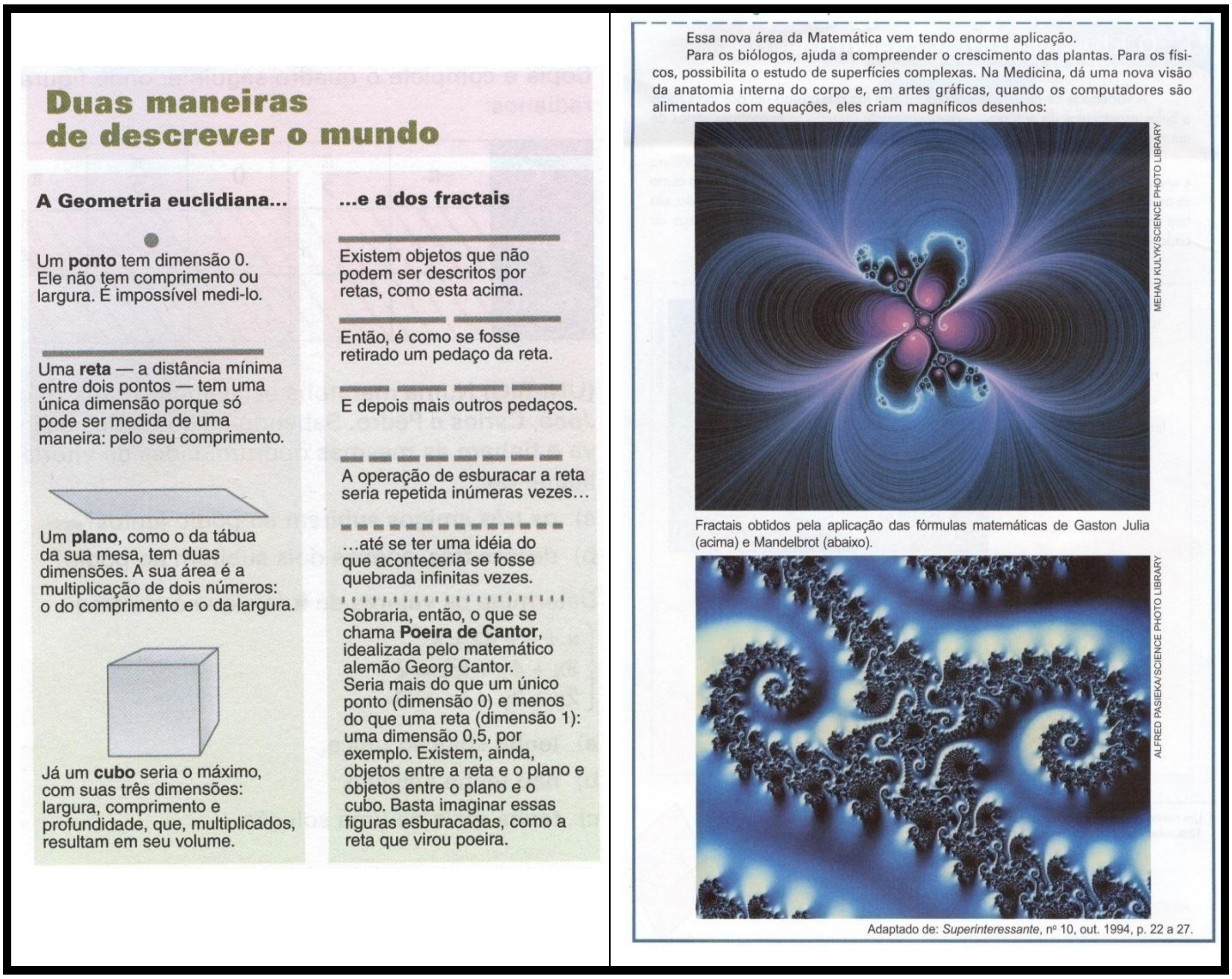
Imagens fractais também têm sido usadas em filmes de ficção, como em *O retorno de Jedi*.

Gregory Sams/SPL/LatinStock

Observe esse outro fractal: veja como parece um cenário de filme de ficção científica..

Quadro 4 - Seção Para saber mais - sequências na era do computador
Fonte: Smole; Diniz (2010)

O volume 2 das mesmas autoras, indicado para a 2ª série do Ensino Médio, também na seção “Para saber mais” as autoras apresentam o texto, “A matemática do delírio” no qual aborda a Geometria Fractal a partir de uma reportagem publicada na revista Superinteressante. (OLIVEIRA, 1994). O texto aponta a Geometria Fractal, fazendo uma comparação com a Geometria Euclidiana. Através de um quadro comparativo, aponta as características dos fractais explicando o que significa a dimensão fracionária, relata os trabalhos do artista gráfico Greg Sams e do grupo Fractarte, grupo este composto por três pesquisadores da Universidade de São Paulo, que divulgam trabalhos envolvendo a Geometria Fractal. Também nesta seção destaca as imagens dos fractais de Gaston e Mandelbrot, obtidos pela aplicação de fórmulas matemáticas. O Quadro 5, a seguir, traz a seção do livro na nova edição de 2010 (SMOLE; DINIZ, 2010, p. 248-249).



Duas maneiras de descrever o mundo

A Geometria euclidiana...

Um **ponto** tem dimensão 0. Ele não tem comprimento ou largura. É impossível medi-lo.

Uma **reta** — a distância mínima entre dois pontos — tem uma única dimensão porque só pode ser medida de uma maneira: pelo seu comprimento.

Um **plano**, como o da tábua da sua mesa, tem duas dimensões. A sua área é a multiplicação de dois números: o do comprimento e o da largura.

Já um **cubo** seria o máximo, com suas três dimensões: largura, comprimento e profundidade, que, multiplicados, resultam em seu volume.

...e a dos fractais

Existem objetos que não podem ser descritos por retas, como esta acima.

Então, é como se fosse retirado um pedaço da reta.

E depois mais outros pedaços.

A operação de esburacar a reta seria repetida inúmeras vezes...

...até se ter uma idéia do que aconteceria se fosse quebrada infinitas vezes.

Sobraria, então, o que se chama **Poeira de Cantor**, idealizada pelo matemático alemão Georg Cantor. Seria mais do que um único ponto (dimensão 0) e menos do que uma reta (dimensão 1): uma dimensão 0,5, por exemplo. Existem, ainda, objetos entre a reta e o plano e objetos entre o plano e o cubo. Basta imaginar essas figuras esburacadas, como a reta que virou poeira.

Essa nova área da Matemática vem tendo enorme aplicação.

Para os biólogos, ajuda a compreender o crescimento das plantas. Para os físicos, possibilita o estudo de superfícies complexas. Na Medicina, dá uma nova visão da anatomia interna do corpo e, em artes gráficas, quando os computadores são alimentados com equações, eles criam magníficos desenhos:

Fractais obtidos pela aplicação das fórmulas matemáticas de Gaston Julia (acima) e Mandelbrot (abaixo).

Adaptado de: *Superinteressante*, nº 10, out. 1994, p. 22 a 27.

Quadro 5 - Seção "Para saber Mais" - Duas maneiras de descrever o mundo e Matemática do Delírio
Fonte: Smole; Diniz (2010)

Ainda que de forma ilustrativa a abordagem do texto da Seção "Para saber Mais", Smole e Diniz (2010) pode motivar os alunos a pesquisas sobre o tema, e também o professor poderá a partir do texto construir materiais para a abordagem da Geometria Fractal em sala de aula.

O livro Matemática, Coleção Um Novo Olhar (SOUZA, 2010) também traz indicação para um trabalho em sala de aula envolvendo a Geometria Fractal. O livro apresenta uma seção denominada "Explorando o Tema", com textos extraídos de livros, revistas e internet, estes textos, segundo o autor, abordam temas ligados a história da Matemática, assuntos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e curiosidades acerca do conteúdo do capítulo.

O volume 1 do livro de Matemática (SOUZA, 2010) indicado para a 1ª série do Ensino Médio, no capítulo referente ao conteúdo Conjuntos, na seção “Explorando o Tema” apresenta o texto “O homem que colocou o infinito no bolso” o qual relata sobre as descobertas de Georg Cantor e o conceito de infinito e como estas descobertas serviram de base para a teoria dos fractais. Neste volume também é abordado situações problemas envolvendo a Geometria Fractal nos cálculos de somas de termos de sequências infinitas.

O volume 3 do livro do mesmo autor (SOUZA, 2010) indicado para a 3ª série do Ensino Médio, apresenta como introdução ao capítulo referente aos conteúdos “Polinômios e Equações Algébricas” um texto ilustrado envolvendo a Geometria Fractal, o texto apresenta a definição de fractais suas características e aplicações. As belas figuras de fractais apresentadas indicam como construir um fractal e destacam as características principais dos fractais. A seguir os fractais encontrados no referido livro. (SOUZA, 2010) (Figuras 9 e 10). Destaque também uma situação problema envolvendo Geometria Fractal, apresentada no Quadro 6.

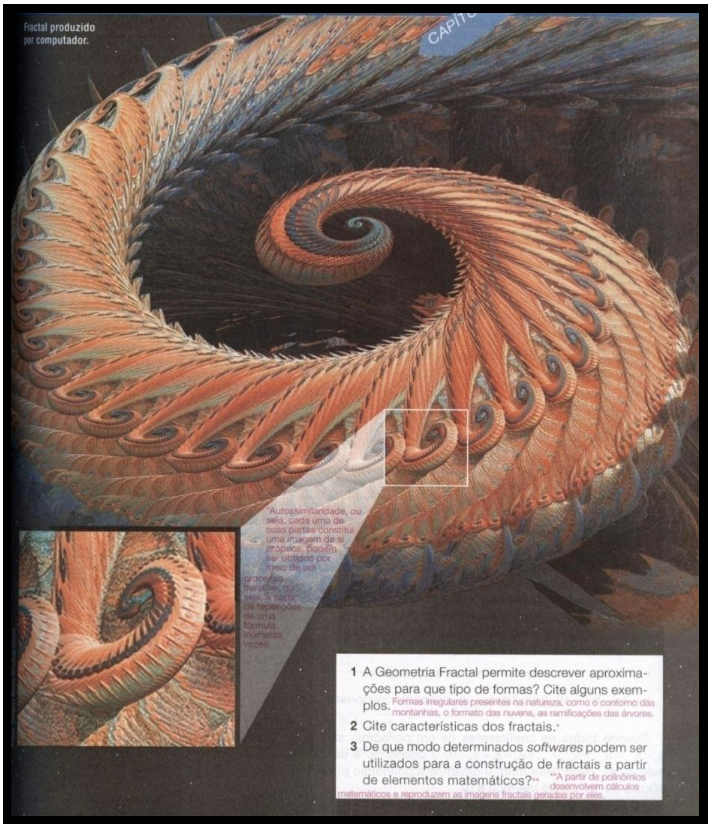
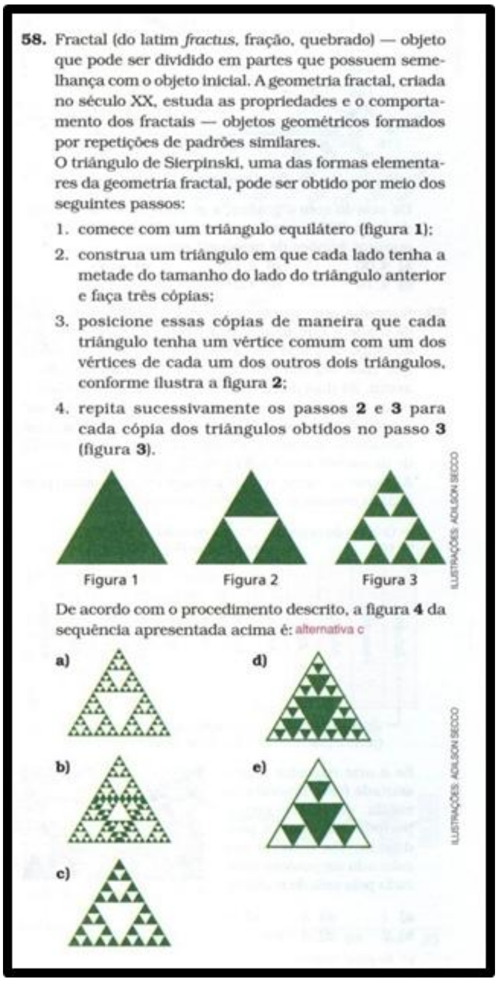


Figura 9 - Fractal produzido por computador
Fonte: Souza (2010)

Figura 10 - Construção do Fractal Floco de Neve
Fonte: Souza (2010)



58. Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.
O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura **1**);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura **2**;
4. repita sucessivamente os passos **2** e **3** para cada cópia dos triângulos obtidos no passo **3** (figura **3**).

Figura 1 Figura 2 Figura 3

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

De acordo com o procedimento descrito, a figura **4** da sequência apresentada acima é: alternativa c

a) d)

b) e)

c)

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Quadro 6 - Problema envolvendo Fractais
Fonte: Souza (2010)

A atividade figura 10 (SOUZA, 2010), indica as etapas de construção do Floco de Neve, em figuras, facilitando a compreensão dos alunos. Em relação à questão, Quadro 6, o destaque é o texto apresentar a definição de Fractal, bem como a origem da Geometria Fractal, traz também as etapas de sua construção, uma questão semelhante foi apresentada no ENEM de 2008.

Estas referências à Geometria Fractal que começam a aparecer nos livros didáticos, podem indicar tanto ao professor como aos alunos o ponto de partida para uma discussão em sala de aula deste tema.

3 METODOLOGIA

Um dos fatores que motivou esta pesquisa foi a implementação, nas escolas estaduais do Paraná, das Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática que “assume a Educação Matemática como campo de estudo”. (PARANÁ, 2008). Tendo em vista que, pela Educação Matemática, almeja-se um ensino em que os alunos tenham uma participação ativa no processo ensino aprendizagem. A inclusão da Geometria Fractal como conteúdo da educação Básica, representa um avanço na Educação Matemática do Paraná.

Nesse sentido, é necessário que o professor reveja e modifique sua prática pedagógica, assumindo o papel de mediador do processo ensino aprendizagem, visando possibilitar que o aluno saia de uma atitude passiva, no qual ele é apenas receptor do conteúdo e passe a interagir com o conhecimento.

3.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA

Segundo Bicudo (1993, p.18-19 apud FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 59), pesquisar significa “perseguir uma interrogação (problema ou pergunta) de modo rigoroso, sistemático, sempre, sempre andando em torno dela, buscar todas as dimensões, qualquer que seja a concepção de pesquisa assumida pelo pesquisador”.

Ao fazer uma pesquisa, buscam-se respostas para um problema, todos os momentos durante a pesquisa, têm por objetivos resolver este problema. Neste trabalho, busca-se responder a questão: “Como introduzir os conceitos básicos de Geometria Fractal no Ensino Médio, por meio de diferentes atividades?”

Quanto à abordagem do problema, essa pesquisa é classificada como **qualitativa**, visto que, “o qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções de respeito, de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências” (BICUDO, 2006, p.106). E ainda, Silva e Menezes (2001) corroboram essa ideia.

> Considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento- chave. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem (SILVA; MENEZES, 2001, p. 20).

Esta pesquisa se enquadra nesta definição, sendo o ambiente natural e fonte direta para a coleta de dados a sala de aula. Visa analisar o comportamento e aprendizagem dos alunos mediante a aplicação de atividades, na abordagem dos conceitos de Geometria Fractal.

Uma pesquisa qualitativa, segundo Moreira e Caleffe (2008) explora as características dos indivíduos e cenários que não podem ser facilmente descritos numericamente. O dado é verbal coletado pela observação, descrição e gravação. Neste tipo de pesquisa, o pesquisador tem um papel fundamental, pois ele é o principal instrumento de coleta de dados, porque, “como pesquisador interpretativo lidando com múltiplas realidades, o “instrumento” tem de ser capaz de reconhecer, classificar e distinguir as sutilezas do significado que emerge” (MOREIRA; CALEFFE, 2008, p. 63). Em uma pesquisa qualitativa é o pesquisador que analisa subjetivamente os dados coletados.

Segundo Silva e Meneses (2001), do ponto de vista da sua natureza, este trabalho é classificado como uma **pesquisa aplicada**, pois objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática dirigida à solução de problemas específicos. Envolve verdades e interesses locais. Como afirma Moreira e Caleffe (2008) “Pesquisa aplicada é a realizada com propósito de resolver um problema”.

A abordagem do conteúdo foi desenvolvida a partir da aplicação de atividades diversificadas envolvendo os conceitos de Geometria Fractal possibilitando ao aluno fazer descobertas, construir ideias, levando à aprendizagem.

Foram analisados os dados referentes à aprendizagem dos alunos, de uma única turma de um colégio da cidade de Ponta Grossa, que possui um total de dois mil alunos matriculados no Ensino Médio regular e Educação Profissional. O processo de desenvolvimento da atividade em sala de aula e seu significado, a aprendizagem dos alunos, foram os principais fatores da abordagem.

3.2 A AMOSTRA ENVOLVIDA

Tendo como ambiente de ação e reflexão a escola, este trabalho foi desenvolvido em um colégio público da rede estadual de ensino da cidade de Ponta Grossa. A escolha do colégio se justifica pelo fato de ser o colégio de atuação do professor- pesquisador.

O referido colégio situa-se na região central da cidade e atende aproximadamente dois mil alunos no ensino médio nos períodos matutino, vespertino e noturno. Considerado um colégio de referência no ensino, atende alunos de diversas regiões da cidade.

Nesse sentido, existe uma grande heterogeneidade, em relação aos conteúdos básicos de matemática, tendo em vista as diferentes realidades dos alunos.

Esta pesquisa foi aplicada na disciplina de Matemática em uma turma de quarenta alunos da 1ª série do Ensino Médio, período noturno, em consonância com as DCE, que orienta para que os conteúdos de Geometria sejam abordados em todas as séries, integrados aos demais conteúdos.

O critério para a escolha da referida turma foi a liberação da direção do colégio para assumir a turma, tendo em vista que no momento da realização da pesquisa, o professor-pesquisador atuava na coordenação pedagógica junto ao Núcleo Regional de Educação, estando afastada de sala de aula.

3.3 COLETA DE DADOS

No desenvolvimento das atividades com os alunos, os registros das discussões de cada atividade foram realizados em fichas para posterior análise dos avanços alcançados pelos mesmos. Também para coleta de dados, foram utilizados os instrumentos: observação, anotações, registros fotográficos, gravações em áudio dos relatos orais e discussões em sala de aula.

No processo de ensino e aprendizagem é necessário que a exploração dos conceitos se realize a partir do conhecimento trazido pelos alunos. Sendo assim, elaboramos uma atividade diagnóstica inicial com o objetivo de verificar os conhecimentos prévios dos alunos referentes aos conceitos de Geometria Euclidiana.

3.3.1 Plano de Trabalho

Inicialmente foi elaborada uma avaliação diagnóstica envolvendo questões de geometria euclidiana, para perceber os conhecimentos prévios dos alunos.

Na sequência foi planejada a oficina envolvendo a abordagem dos conceitos de geometria fractal para o desenvolvimento em sala de aula, que formaram o corpo das atividades aplicadas aos alunos, sujeitos da pesquisa.

Para a aplicação das atividades e posterior análise, optou-se por abordar o trabalho em dois momentos: Geometria Fractal – construções em sala de aula e Geometria Fractal – exploração e observação em Laboratório de Informática.

As atividades foram desenvolvidas em, cinco encontros, sendo o tempo de cada encontro 2 horas/aula, caracterizando um total de aproximadamente 10 horas de atividades. No primeiro encontro foi realizada a aplicação do pré-teste, na sequência foram três encontros para as atividades com a geometria fractal, e no quinto encontro como avaliação foi realizada uma apresentação dos trabalhos. Todos os momentos que compõem o desenvolvimento da pesquisa envolveram:

1. Solicitação do desenvolvimento da pesquisa à direção do colégio;
2. Discussão e leitura do projeto com a Equipe Pedagógica, para a tomada de ciência do desenvolvimento do projeto durante as aulas de matemática;
3. Discussão e orientação do desenvolvimento do projeto com os alunos, bem como a permissão para eventuais publicações;
4. Inicio do desenvolvimento do projeto com a aplicação do pré-teste;
5. Desenvolvimento do primeiro momento com as atividades de construções dos fractais em sala de aula;
6. Desenvolvimento do segundo momento com as atividades no laboratório de informática do colégio;
7. Atividade de avaliação: apresentação para os alunos e Equipe Pedagógica dos trabalhos realizados.

4 APRESENTAÇÃO DAS ATIVIDADES E DISCUSSÃO DOS DADOS

Neste capítulo, descrevemos as atividades aplicadas aos alunos durante o desenvolvimento da pesquisa e a analise das observações registradas. Por questões éticas atentou-se para o cuidado com a preservação da identidade dos alunos, sujeitos da pesquisa, identificando os alunos com A1, A2, A3, e assim sucessivamente.

Primeiro Encontro – O Pré-Teste

Na construção de fractais geométricos, são necessários conhecimentos como: polígonos regulares, ponto médio de um segmento, retas paralelas e perpendiculares entre outros. A verificação dos conceitos prévios, segundo as Diretrizes Curriculares de Matemática (2008, p. 29) “devem ser reestruturadas e sistematizadas a partir de ideias ou conceitos que estruturam as disciplinas de referência”.

Assim, no primeiro momento da pesquisa, foi aplicado um questionário denominado pré-teste com o objetivo de verificar os conhecimentos básicos dos alunos sobre Geometria Euclidiana, tendo em vista que este conteúdo é abordado ao longo de todas as séries do Ensino Fundamental. Conforme apresentado anteriormente, a Geometria Fractal tem como base os conceitos da Geometria Euclidiana.

Neste sentido o questionário foi dividido em três partes: uma parte especificamente teórica para verificar a abstração dos conceitos básicos de Geometria, a segunda através da interpretação de problemas por meio da visualização de figuras e a terceira parte envolvendo questões de raciocínio lógico.

As questões elaboradas na introdução do questionário foram aplicadas no inicio do período letivo, visando construir um perfil da turma e também investigar sobre a vida escolar dos alunos e sua relação com a Matemática. “Conhecer o aluno, saber suas aspirações, seus anseios e medos, ajudam o professor a compreender as suas dificuldades durante o processo de ensino e aprendizagem” (RIBAS, 2001). Nesse sentido, as questões propostas relacionadas a questões pessoais e relacionadas à disciplina de Matemática foram:

1. Qual a sua idade?

2. Você se considera um bom aluno em Matemática?
3. Você já reprovou alguma série em Matemática?
4. Você acha importante saber Matemática? Justifique sua resposta.
5. Você trabalha durante o dia?

Responderam esse questionário inicial 36 dos 40 alunos matriculados na primeira série H, período noturno de um colégio público da rede Estadual de Ensino da cidade de Ponta Grossa, Paraná, como fora referido anteriormente.

A idade dos alunos variava entre 16 a 18 anos, o que os coloca fora do padrão idade/série, alunos que iniciam a vida escolar aos sete anos, cursam a primeira série do ensino médio entre 14 e 15 anos, comprovado na terceira pergunta, pois, para a maioria deles, exceto quatro, a Matemática já significou um fracasso, com reprovação. Em relação a gostar de Matemática, os alunos afirmam acham difícil, mas gostam. Dos alunos que responderam o questionário apenas cinco não trabalham, sendo que os demais por desenvolverem suas atividades no comércio, em lojas e supermercados conseguem perceber a Matemática como importante para resolver problemas do dia a dia, como se pode verificar através das respostas apresentadas por alguns alunos:

"A matemática é importante porque em muitos problemas que enfrentamos necessitamos de matemática para resolvê-los" (Aluno A1). "Sim ela é muito importante porque me ajuda a entender e compreender o mundo" (Aluno A2). "Sim, porque tudo em nossa vida envolve a matemática" (Aluno A3).

Verificou-se que o perfil dos alunos do ensino noturno difere dos alunos do ensino diurno, principalmente no que se refere à idade e que a maioria vem para o colégio após um dia de trabalho. Nesse sentido, "é necessário que o professor seja um mediador do conhecimento, que atenda à diversidade dos alunos, que busque novas metodologias e estratégias de ensino, visando integrar o aluno" (RIBAS, 2001).

Dando continuidade à pesquisa com objetivos de verificar, a partir de questões especificamente teóricas, se os alunos reconheciam, diferenciavam e caracterizavam conceitos básicos de geometria, foram propostas as seguintes questões:

5. O que estuda a Geometria?
6. Escreva situações do dia – a – dia em que você observa a geometria.
7. Qual a diferença entre um quadrado e um retângulo?
8. Desenhe um triângulo retângulo.
9. Desenhe um hexágono e um hexaedro e aponte sua principal característica.
10. Desenhe um polígono de cinco lados e trace suas diagonais.
11. O que é um fractal.

Quadro 7 - Questões do pré-teste teórico
Fonte: Autoria própria

Considerando que para a resolução desta parte do pré-teste não houve a mediação do professor, a análise foi realizada a partir das respostas escritas dos alunos.

Ao analisar as respostas, notou-se a dificuldade dos alunos nesta parte do questionário, em reconhecer as características das figuras geométricas quando apresentadas de forma teórica. Os alunos entendem geometria, apenas como parte da matemática que estudada “triângulos e quadrados”, reconhecem situações do cotidiano que envolve geometria, mas não sabem conceituá-las. Apenas uma aluna já tinha ouvido falar de fractal, pois relatou que havia participado de uma oficina apresentada em sua escola, quando estava na 8ª série, não sabia a definição, mas lembrava do exemplo da couve-flor, que tem a forma de um fractal. Assim, neste momento do pré-teste não foram abordadas questões referentes a outras geometrias, apenas se os alunos conheciam fractais.

As respostas referentes às questões teóricas contidas na introdução do questionário deixaram evidente que o professor precisa no ensino de geometria, além de trabalhar regras, postulados e teoremas, também se utilizar de representações concretas em suas práticas. Nesse sentido, Neves (2008, p. 61) afirma:

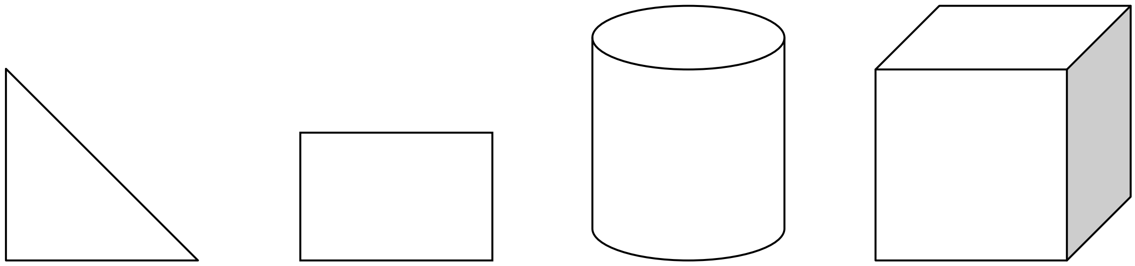
> Para a apropriação efetiva dos conceitos geométricos, a estrutura do trabalho pedagógico deve ser reconstruída. Trata-se de fornecer aos alunos um conjunto de situações didáticas variadas em que ele terá a oportunidade de “dialogar” com o saber geométrico em diferentes representações e, a partir daí, com o auxílio da visualização, elaborar diferentes representações mentais.

A segunda parte do pré-teste, referente ao conteúdo de Matemática, foi elaborada, com questões visando verificar o papel da visualização como instrumento de aprendizagem, pois segundo Fainguelernt (1999) o ensino de Geometria deve partir da exploração, do reconhecimento e da descrição do espaço, que são realizados intuitivamente através da representação visual, possibilitando aos alunos a construção de um caminho que o ajudará a fazer a passagem do estágio do concreto para o abstrato. Nesse sentido, estas questões apresentavam os mesmos objetivos das realizadas na primeira parte do pré-teste, porém a representação das figuras através do visual auxiliava a compreensão dos alunos.

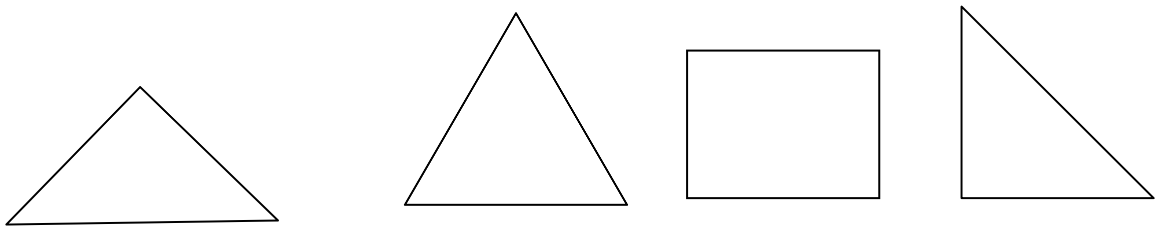
Nas questões, 12, 13, 14, 15 e 16 relacionadas ao pré-teste, foram apresentadas de forma impressa para que os alunos respondessem por escrito.

Nestas questões o objetivo além de verificar o conhecimento geométrico dos alunos, também visava analisar se a representação em forma de desenho auxiliava na interpretação. Os alunos precisavam a partir da representação das figuras geométricas: identificá-las como figuras planas ou não planas; identificar polígonos como retângulos, quadrados; diferenciar tipos de triângulos; reconhecer figuras em diferentes posições no plano; traçar diagonais e nomear os elementos dos poliedros. Na sequência as questões apresentadas no pré-teste:

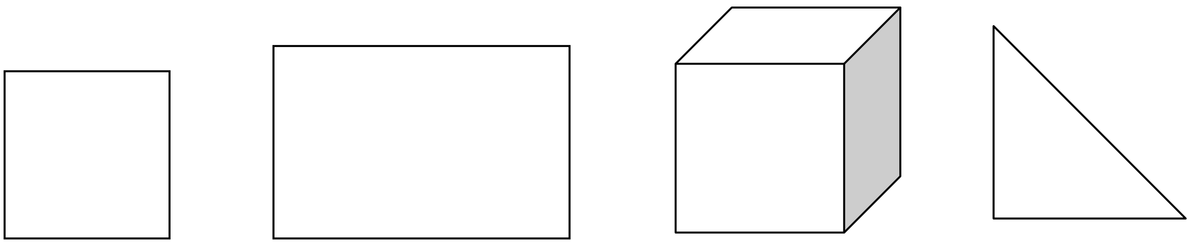
12. Nas figuras abaixo quais representam figuras planas?



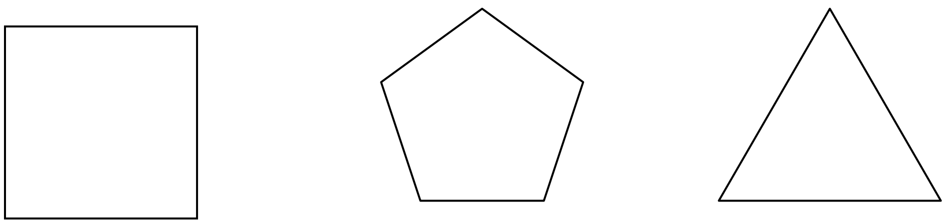
13. Nas figuras abaixo, identifique quais são triângulos retângulos?



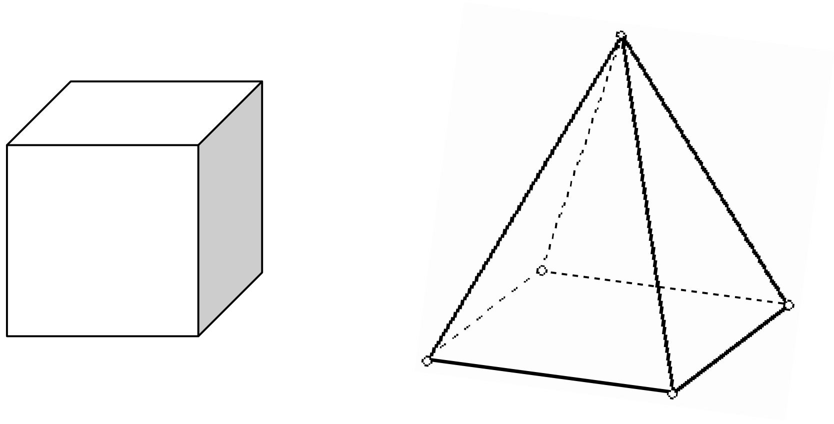
14. Identifique as figuras pela sua nomenclatura, escrevendo abaixo.



15. Nos polígonos abaixo trace suas diagonais.



16. Nos poliedros identifique os elementos: vértice, aresta e face e conte quantos são em cada figura.



Foi possível perceber na segunda parte do pré-teste, que as questões foram respondidas pelos alunos sem dificuldades, com identificação de conceitos geométricos, demonstrando assim, a importância da representação visual no processo de ensino aprendizagem de geometria.

Durante a resolução desta parte do pré-teste, alguns alunos pontuavam questões, como por exemplo, *“A diagonal une dois cantos da figura”* (Aluno A4), pode-se observar no relato oral o aluno não percebeu que a definição também poderia ser o lado do polígono, no entanto, quando verificado o seu registro escrito, a questão estava correta. Outro aluno comentou: *“Agora eu sei a diferença entre quadrado e retângulo, o quadrado todos os lados são iguais e o retângulo tem dois lados diferentes”* (Aluno A5). Percebe-se nesta fala que a representação, através do desenho, auxilia o aluno na compreensão das características das figuras geométricas.

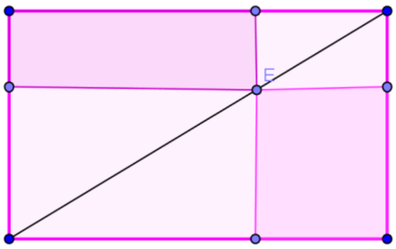
As únicas dificuldades apresentadas pelos alunos nesta parte do pré-teste foram nas questões 13 e 16. Na questão 13, foi solicitado que o aluno através do desenho identificasse os triângulos retângulos sendo apresentado em diferentes posições, (sem a identificação do ângulo reto). Observou-se que neste momento nenhum dos alunos presente identificou como triângulo retângulo a primeira figura. Outra dificuldade observada, referente à questão 16, foi que os alunos, também não sabiam identificar os elementos de um poliedro.

A partir desta parte do pré-teste, também foi possível verificar, que mesmo os alunos tendo passado por oito ou nove anos de escolaridade em que o ensino de geometria está presente ou deveria estar, apresentaram dificuldades nos conceitos geométricos básicos, a partir das respostas no pré-teste constatou-se que eles apenas, “reconhecem ou reproduzem figuras através das formas e não pelas propriedades”. (LORENZATO, 1995).

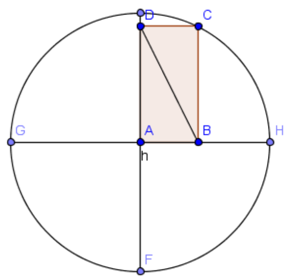
A última parte do pré-teste teve como objetivos verificar o comportamento e a aprendizagem dos alunos diante de situações problemas envolvendo geometria, as quais para resolvê-las eram necessárias com requisitos a observação e a visualização, nas questões apresentadas, segundo Lorenzato (1995), é preciso ter “percepção geométrica”. As questões 17 e 18 do pré-teste foram adaptadas das apresentadas no texto, “Porque não ensinar Geometria” de Sergio Lorenzato, (A Educação Matemática em Revista, 1995).

Nesta parte do pré-teste, foram apresentadas três questões, 17, 18 e 19. As quais abordam conceitos como: Diagonais de um polígono, retas paralelas e perpendiculares, raios de circunferência e sua característica, áreas de figuras plana e o conceito de parte-todo. A seguir as questões 17 e 18

17. A figura a seguir é um retângulo e **E** é um ponto qualquer na diagonal por onde passam uma paralela e uma perpendicular à base. Compare as áreas dos dois retângulos escurecidos.



18. Dado um círculo de centro A e raio 5 cm, quanto mede a diagonal do retângulo ABCD?



19. Nas figuras abaixo, quais têm a mesma parte (área) colorida em relação à Figura 1. (atividade retirada de “Que geometria pode ser significativa para a vida?”, de Regina M. Pavanello). (PAVENELLO, 1993).

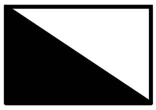


Figura 1

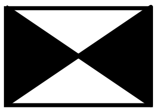


Figura *a*

Figura *b*

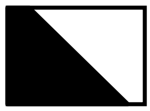


Figura *c*

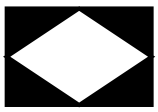


Figura *d*

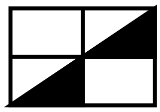


Figura *e*

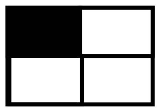


Figura *f*

O resultado desta parte do pré-teste revelou que os alunos, conseguem resolver os problemas envolvendo raciocínio lógico quando auxiliados pela visualização, tiveram dificuldade apenas em identificar a Figura c da questão 19, as demais todos acertaram, evidenciando a presença da “percepção geométrica”. Nesse sentido, o professor no ensino aprendizagem de geometria, precisa buscar metodologias que integrem as diferentes representações do conceito trabalhado, aliando à teoria a prática.

A análise dos erros e acertos dos alunos, ao responderem o pré-teste, ver quadro 8, confirma a importância da visualização para a aprendizagem em geometria e que as atividades precisam estar voltadas para as diferentes representações do mesmo conteúdo, a linguagem, a representação através de imagem e a algébrica.

Os questionamentos e o percentual correspondente ao número de acertos dados pelos alunos podem ser observados no Quadro 8 a seguir:

QUESTIONAMENTO	ACERTOS % TEÓRICA	ACERTOS% VISUAL
1) Diferencia figuras planas de não-planas	40%	90%
2) Reconhece os elementos de um polígono ou poliedro	10%	10%
3) Reconhece diagonais de um polígono	10%	80%
4) Identifica polígonos pelo número de lados	10%	60%
5) Identifica Fractais	00%	50%
6) Identifica eixo de simetria	20%	90%
7) Tem noção de Geometria não-euclidiana	00%	00%
8) Realiza cálculos de área e perímetro	00%	50%
9) Relaciona partes iguais de um polígono		50%
10) Identifica poliedros	10%	60%

Quadro 8 - Porcentagem de acertos no Pré-teste
Fonte: Autoria própria

Este quadro com o percentual de acertos dos alunos, comparando os acertos das questões que apresentavam a representação geométrica e as que não apresentaram, deixa evidente a importância do trabalho com o conteúdo de Geometria ao longo do Ensino Fundamental, precisa ser baseado na representação, na utilização de material concreto, na visualização integrado a parte teórica.

Em relatos orais, gravados durante a realização do questionário, foi possível verificar os erros conceituais geométricos dos alunos, como é relatado pelo aluno A6 e aluno A7.

“Pirâmide é um triângulo”, (Aluno A6); *“quadrangular é um triângulo de quatro lados”* (Aluno A7).

Um aspecto positivo verificado nas respostas dos alunos foi à tentativa de buscar explicação para os conceitos, utilizando fatos do cotidiano, mostrando a importância de que o professor deve na rotina da sala de aula, considerar o cotidiano do aluno, promovendo a interação do processo de ensino com os fatos da vida, contextualizando o ensino, o que os leva os alunos a dominarem os conceitos, compreendendo-os como conhecimentos utilizados no dia a dia.

A partir das respostas dos alunos ao pré-teste, foi possível verificar o que já sabiam, isto é, conhecimento prévio, sobre geometria e em quais pontos havia necessidade de aprofundamento.

> O interesse do professor por aquilo que os alunos já conhecem é uma ocupação prévia sobre o tema que será desenvolvido. É um cuidado preliminar... Essa tomada de consciência da realidade e dos interesses dos alunos evita o distanciamento entre suas preocupações e os conteúdos escolares. (GASPARIM, 2007, p.16-17).

Nesse sentido, fica evidente a importância do professor conhecer a realidade do grupo que está trabalhando, buscar construir sua prática pedagógica a partir do conhecimento que os alunos já trazem.

Segundo Encontro - Geometria dos Fractais

Para o desenvolvimento desta atividade, optamos por trabalhar em forma de oficina, dividindo a abordagem em duas etapas: a primeira, em sala de aula, a partir da elaboração de desenhos, dobraduras e recortes e a segunda, no laboratório de informática, com a manipulação de fractais utilizando um *software* gratuito. A avaliação foi realizada através de uma exposição e apresentação dos trabalhos realizados.

As atividades foram apresentadas no multimídia, e os alunos mesmo estando em grupo realizavam as atividades de forma individual. Na primeira etapa do trabalho, além dos objetivos de reconhecer os fractais e discutir suas propriedades, buscou-se aliar as construções geométricas, utilizando como materiais: folhas de papel A4, compasso, conjunto de lápis de cor, papel cartão, tesoura, régua, jogos de esquadros.

Atividade 1 – Introduzindo geometria fractal Construção de um quebra cabeça de uma figura fractal

Para cada equipe foi distribuído um envelope contendo um quebra cabeça com uma figura de um fractal, o objetivo desta atividade foi despertar o interesse motivando o aluno para o assunto. Os alunos montaram o quebra cabeça sem dificuldade. É uma atividade comum para os alunos, durante a construção, uma equipe desafiava a outra para ver quem conseguiria construir antes. Após a construção, oralmente os alunos responderam duas questões; - Quem conhece essas figuras? - Qual a relação destas figuras com a matemática?

Os alunos acharam as figuras muito bonitas, comentando que pareciam obras de arte. A primeira pergunta apenas à aluna que relatou que já havia participado de uma oficina sobre fractais no ano anterior conhecia e sabia o nome, mas a relação dessas figuras com a matemática, nenhum dos alunos tinha conhecimento.

Atividade 2 – Introduzindo a geometria fractal

Utilizando o projetor multimídia apresentar figuras do nosso cotidiano e solicitar aos alunos que utilizem formas geométricas para representá-las.

O objetivo desta atividade foi fazer com que o aluno percebesse diversas formas geométricas existentes nos objetos do nosso dia a dia. As figuras apresentadas foram: Tronco de uma árvore, o sol, uma casa, montanhas, nuvens, raios, couve flor, e uma concha de molusco (*nautilus*). Em cada figura apresentada, os alunos relatavam oralmente, qual figura geométrica poderia ser utilizada para representá-la. Nas três primeiras figuras apresentadas, os alunos responderam sem dificuldades, no entanto, nas demais houve uma discussão, pois alguns diziam que uma montanha poderia ser uma pirâmide, outros um cone, a couve flor poderia ser uma esfera. Assim, neste momento foi introduzido o conceito de fractal, colocando que essa geometria surgiu da dificuldade que os matemáticos tinham, desde a antiguidade, de representar alguns objetos irregulares da natureza.

Atividade 3 – Conhecendo a geometria fractal

Utilizando o projetor multimídia apresentar diferentes tipos de fractais: fractais geométricos, da natureza e aleatórios, destacando suas principais características.

Com o objetivo de, a partir da apresentação de alguns fractais, discutir e entender a história de sua origem, e suas principais características, elaborou-se uma apresentação em Power Point, na qual se destacou: a história da origem dos fractais; a biografia de Benoit Mandelbrot; as principais características da Geometria Fractal.

Atividade 4 – Conhecendo a geometria fractal

Construção da Curva de Koch. (adaptada de Barbosa, 2005)

Etapas da construção:

1º. Em uma folha de papel, desenhe um segmento de reta AB, 27 cm;

2º. Divida o segmento AB em três partes iguais, de mesma medida;

3º. Construa um triângulo equilátero, utilizando a parte central como base e em seguida, apague a base;

4º. Nos quatros segmentos obtidos, realizar o mesmo procedimento dos itens 2 e 3, sucessivamente, (iteração).

Questões para discussões: Relate por escrito suas observações.

- Por que a Curva de Koch é considerada um fractal;
- Considere o segmento inicial como Nível zero, e a cada iteração realizada, um nível seguinte, qual o comprimento da curva no 3º nível? Construa uma tabela, identificando o nível e o respectivo comprimento.
- O que acontece em cada nível com o comprimento da curva?

Para a realização desta atividade, as etapas para construção do fractal Curva de Koch, foram apresentadas no multimídia. Nesta construção, observou-se que os alunos tiveram dificuldades apenas na construção do triângulo equilátero.

Neste sentido, à medida que as dúvidas surgiam, oralmente eram discutidas no grande grupo, “o professor intervindo como mediador no processo ensino e aprendizagem”, tendo em vista que ao trabalhar a Geometria Fractal o objetivo também é rever os conceitos de geometria plana.

Na análise dos registros escritos, das questões para discussões, após a realização da atividade 4, percebeu-se que os alunos, entenderam as características básicas dos fractais, sendo que a maioria relatou que a Curva de Koch é um fractal, pois repete sucessivamente a operação de dividir em três partes iguais e construir um triângulo equilátero na parte central, como relata a aluna: *“fazemos sempre a mesma coisa, dividimos em três e construímos um triângulo no centro”* (Aluno A9).

No entanto, as duas questões seguintes, encontrar a medida do comprimento da Curva de Kock nos diferentes níveis e observar a regularidade nesse comprimento, foi necessária a intervenção do professor na construção da tabela, e mesmo com a tabela construída, os alunos apenas conseguiram completála fazendo contagem no fractal construído. Para a generalização dos dados solicitados na tabela, foi necessário o professor intervir, auxiliando na observação da regularidade.

Assim oralmente, professor/aluno a tabela foi construída, chegando à generalização, algebrização. A seguir a tabela 1 construída, no momento da sua elaboração foi possível retomar com os alunos conteúdos como: operações, números e álgebra.

Tabela 1 – Explorando numericamente o Fractal Curva de Koch

Nível	Quantidade de segmentos	Medida de cada segmento	Comprimento total
0	$1 = 4^0$	27	27
1	$4=4^1$	9= 27/3	36=4. 27/3
2	$16=4^2$	$3= 27/3^2$	$48=16.27/3^2$
3	$64=4^3$	$1=27/3^3$	$64=64.27/3^3$
N	4^n	$27/3^n$	$4^n. 27/3^n$

Fonte: Autoria própria

Atividade 5 – Conhecendo a geometria fractal

Construção do Floco de neve de Koch (Adaptado de Barbosa, 2005)

Etapas da construção:

1ª. Construir um triângulo equilátero de 9 cm de lado.

2ª. Em cada lado do triângulo, realizar a mesma operação da construção da curva de Koch.

3ª. Realizar essa operação sucessivamente.

Questões para discussões: relate por escrito suas observações.

- Neste fractal, qual operação que consideramos a iteração?
- O que significa auto-similaridade?

Com esta atividade foi encerrada a aula do dia, (2 horas/aulas). Percebe-se que a utilização de uma atividade diferenciada motiva e incentiva a participação dos alunos, levando-os a aprendizagem, constatado nos relatos orais dos alunos ao final da aula: *“nossa já terminou a nossa aula”* (Aluno A10), *“aula assim nem percebemos o tempo passar”* (Aluno A11). *“Profª eu gostei muito desses fractais”* (Aluno A12).

Terceiro Encontro – Geometria dos Fractais

Tendo em vista que as atividades foram desenvolvidas no horário normal das aulas de matemática, iniciamos este encontro, com uma retomada da atividade do encontro anterior a construção do Floco de Neve de Koch, pois no referido encontro não houve tempo para as discussões. Assim, foram postadas no multimídia questões com o objetivo de retomar o conteúdo e também verificar se os alunos haviam assimilado as principais características dos fractais. As questões apresentadas foram: - O que são fractais? Quais as suas principais características? O que é auto-similaridade?

As respostas foram dadas oralmente pelos alunos, e a análise realizada a partir da gravação realizada pelo professor.

Ao questionar os alunos sobre o que são fractais e quais as sua características, obtiveram-se diferentes respostas relacionadas a seguir:

- *"Fractais são figuras geométricas infinitas"* (Aluno, A1).
- *"Fractais são figuras que se repetem indefinidamente"* (Aluno, A5).
- *"Fractais são figuras que o pedaço se parece com o inteiro"* (Aluno, A4).
- *A característica dos fractais é que cada pedaço é igual ao inteiro.* (Aluno, A2).

Nota-se nas falas dos alunos, o conceito ainda no senso comum, sendo construído, apesar do professor-pesquisador, na aula anterior ter apresentado a definição e até construído alguns fractais, o conceito ainda não havia sido formalizado pelo aluno. "O conceito é construído nas diversas situações de aprendizagem mediadas pelos instrumentos, através da manipulação do objeto geométrico nas suas diferentes representações". (NEVES, 2008).

Nesse sentido, as próximas atividades visam reforçar a definição de fractais e compreensão das suas principais características.

Atividade 6 – Conhecendo a geometria fractal

Construção do Triângulo de Sierpinski (Adaptado de Barbosa, 2005)

Etapas da construção:

1ª. Construir um triângulo equilátero de 24 cm de lado;

2ª. Encontrar o ponto médio de cada lado do triângulo, unir os pontos médios, formando quatro triângulos equiláteros;

3ª. Repetir essa operação sucessivamente, nos triângulos encontrados, exceto no triângulo central. (no Fractal é eliminado)

4ª. Colorir os triângulos centrais que não foram divididos, utilizando apenas uma cor.

Questões para discussão: Relate por escrito:

- Quantos triângulos existem em cada nível? Utilize a notação de potência para representar esta quantidade. (lembre-se que o triângulo central é eliminado).
- Qual a relação entre a quantidade de triângulos de cada nível?

Após a construção do Fractal Triângulo de Sierpinski, para que os alunos relatassem por escrito, as questões solicitadas foi apresentada a tabela 2 ,e também o fractal Triângulo de Sierpinski nos diferentes níveis, facilitando o entendimento.

A Figura 11 destaca os quatros níveis iniciais da construção do Fractal Triângulo de Sierpinski.

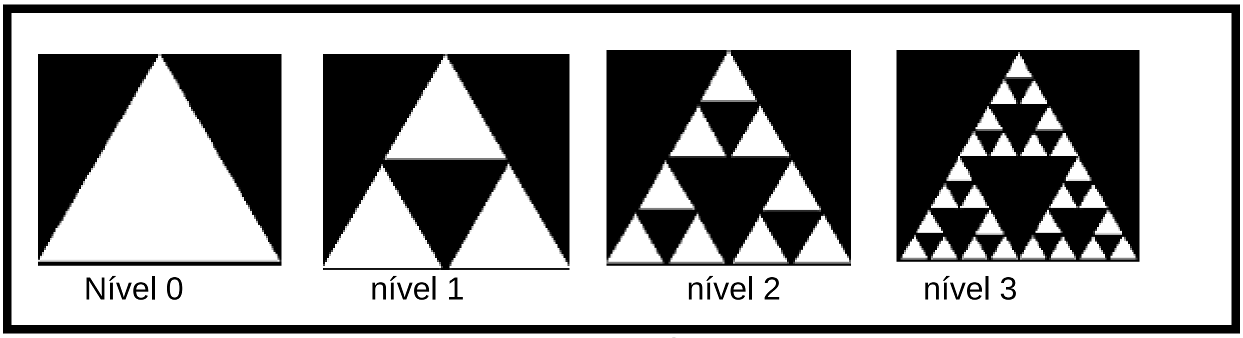


Figura 11 - Iterações do Triângulo de Sierpinski
Fonte: Fractovia (2011)

Em relação à construção do triângulo de Sierpinski completar a tabela 2:

Tabela 2 - A relação das interações no Triângulo de Sierpinski e o cálculo de potência

Nível	Quantidade de triângulo	Potência equivalente
0	1	3^0
1ª	3	3^1
2ª	9	3^2
3ª	27	3^3
4ª	81	3^4
n^a	3^n	3^n

Fonte: Autoria própria

Atividade 7 – Conhecendo a geometria fractal

Construção do Tapete de Sierpinski – (Adaptado de Barbosa, 2005)

Etapas da construção:

1ª. Construa um quadrado de lado medindo 27 cm;

2ª. Divida o quadrado em nove quadrados congruentes;

3ª. Repita a operação em cada um dos oitos quadrados, exceto o quadrado do centro;

4ª. E assim sucessivamente e iterativamente;

5ª. Colorir os quadrados centrais de cada nível, utilizando a mesma cor.

Questões para Discussão: Relate por escrito.

- Para construir o Tapete de Sierpinski, dividimos o lado do quadrado inicial em três partes iguais, o perímetro do quadrado também é dividido por três, e a área? Construa uma tabela e analise o que acontece com a medida do perímetro e da área nos três primeiros níveis.

A tabela construída pelos alunos ficou no formato da tabela 3 a seguir.

Tabela 3 - A relação das iterações no fractal Tapete de Sierpinski e o cálculo de perímetro e área do quadrado

Nível	Lado	Perímetro	Área
0	27	108	729
1	9	36	81
2	3	12	9
3	1	4	1

Fonte: Autoria própria

Atividade 8 – Conhecendo a geometria fractal
Construção de um cartão fractal em dobradura.
Etapas da construção:
1ª. Utilizando uma folha de papel retangular, dobre ao meio a folha, no sentido do maior lado. Em forma de cartão;
2ª. Dobre ao meio novamente no mesmo sentido marque bem a dobra e desdobre.
3ª. No sentido contrário, divida a folha em três partes iguais;
4ª. Utilizando o lado da dobra, (parte fechada na primeira dobra) recorte a parte central, até a marca da segunda etapa;
5ª. A parte recortada coloque para o interior do cartão;
6ª. Repita a operação em cada parte do cartão.

Com estas atividades sobre construções dos três fractais encerrou-se o terceiro encontro. Com a realização destas atividades, além de reforçar as características dos fractais, também foi possível retomar as construções geométricas com a utilização do material apropriado; como construir um quadrado; a utilização do transferidor, do jogo de esquadros e até do próprio compasso.

Neste aspecto ficou clara a dificuldade dos alunos em construção geométrica, principalmente no manejo dos materiais, nos relatos orais durante a realização da atividade percebe-se que a maioria nunca teve contato com estes materiais, *"profª. fica muito fácil fazer um quadrado assim"* (Aluno A13), construção do quadrado utilizando o jogo de esquadros. *"Pra falar a verdade eu nunca usei um transferidor"* (Aluno A14).

A dificuldade maior que os alunos apresentaram foi na parte de cálculos e generalização, pois nas construções das tabelas isso ficou evidente.

Estas atividades oportunizaram a verificação de que muitas vezes o professor não explora todos os aspectos do conteúdo, os alunos sabiam calcular o valor da potência, multiplicando a base tantas vezes conforme o algarismo do expoente, no entanto quando dado o valor da potência não conseguiam encontrar o valor em forma de potência, nas generalizações foi necessário a intervenção do professor, indicando para que os alunos observassem os valores na tabela, "81, 27, 9... são potência de qual número?" "Então, o que acontece com a potência de base três em cada nível?" , "Assim de uma forma geral?" (professor/pesquisador).

Com as atividades realizadas, além de oportunizar o aluno a conhecer a Geometria Fractal, foi possível relacionar os conteúdos: números, álgebra e geometria, seguindo a orientação do documento das DCE do Paraná, as quais indicam a realização de um trabalho integrado entre os conteúdos.

Quarto encontro – Explorações de Fractais Aleatórios

A segunda etapa da oficina, que consistiu na manipulação de fractais, construídos a partir de equações matemáticas, foi desenvolvida no laboratório de informática da escola. Nesta etapa, utilizamos o *software Fractal Forge*, o site *absynth Fractals*, que pode ser acessado no endereço: http://paginas.terra.br/absynth/index.htm, o qual apresenta várias informações sobre os Fractais. As imagens deste site são geradas matematicamente através de funções fractais. Todos os seus elementos: forma, cores, efeitos de iluminação, das imagens apresentadas na GALERIA online foram produzidas em *softwares* específicos para a criação de fractais. O site traz, ainda, uma introdução sobre fractais, além de *links* para informações mais completas e outros *links* para vários sites que trazem exemplos, tutoriais e referências.

Fractal Forge é um *software* de código aberto, distribuído por GNU (*General Public License*), portanto é um *software* livre, ou seja, que pode ser obtido gratuitamente. A Figura 12 é a página inicial do *software*:

Figura 12 - Página inicial do *Fractal Forge*
Fonte: Fractovia (1996)

Anteriormente, já havíamos preparado os computadores baixando este *software* para o trabalho. Nesta atividade os alunos trabalharam em duplas devido ao número reduzido de computadores no Laboratório e utilizavam como apoio o tutorial (apêndice 2) elaborado com a sequência de atividade a serem desenvolvidas.

Tendo em vista que, este aplicativo permite a visualização de fractais, ampliação e redução das figuras, alteração das iterações e alteração das cores, inicialmente foi realizado um reconhecimento do *software*, explorando cada função.

Na sequência cada dupla escolheu um fractal e realizou todas as funções permitidas no *software*. Alguns alunos solicitaram fazer cópias dos fractais para a apresentação final.

Esta atividade pode ajudar a despertar o interesse dos alunos, pois para muitos o computador é utilizado apenas para diversão. Para troca de mensagens, jogos conversas no MSN, etc, ou utilizam o computador no trabalho para aqueles que trabalham em lojas, na emissão de notas e fechamento de compras.

Para o desenvolvimento da atividade, os alunos que tinham facilidade em operar com o computador, foram auxiliando os que apresentavam dificuldade. O que facilitou a realização da atividade foi a utilização do tutorial (apêndice 2) elaborado, pois como cada dupla recebeu o tutorial pôde realizar a atividade e só em caso de dúvida solicitavam auxilio ao professor.

Quando questionados sobre a importância da utilização do software para a visualização e manipulação dos Fractais os alunos relataram que com o software ficou mais fácil compreender o que significava “Complexidade infinita”, pois nos desenhos realizados em sala de aula “não era possível realizar mil iterações” (aluno A5). “Agora eu entendo como essas figuras se formam” (aluno A9).

Ainda como resultado desta etapa, durante o desenvolvimento da atividade os alunos, buscavam identificar as características nos fractais que manipulavam, demonstrando a aprendizagem adquirida.

Quinto Encontro – Atividade Avaliativa Exposição

Como conclusão das atividades, foi realizada em sala de aula, uma exposição dos fractais construídos que se caracterizou como avaliação da oficina.

Para a exposição foi solicitado para que cada aluno construísse um fractal utilizando qualquer tipo de material e apresentasse aos demais colegas, destacando suas principais características e porque era considerado um fractal. Para a exposição à Equipe Pedagógica do colégio e algumas turmas foram convidadas a participar.

Nesta atividade ficou evidente a criatividade dos alunos quando o professor permite que escolham livremente como realizar um trabalho. Segundo as DCE do Paraná que apontam:

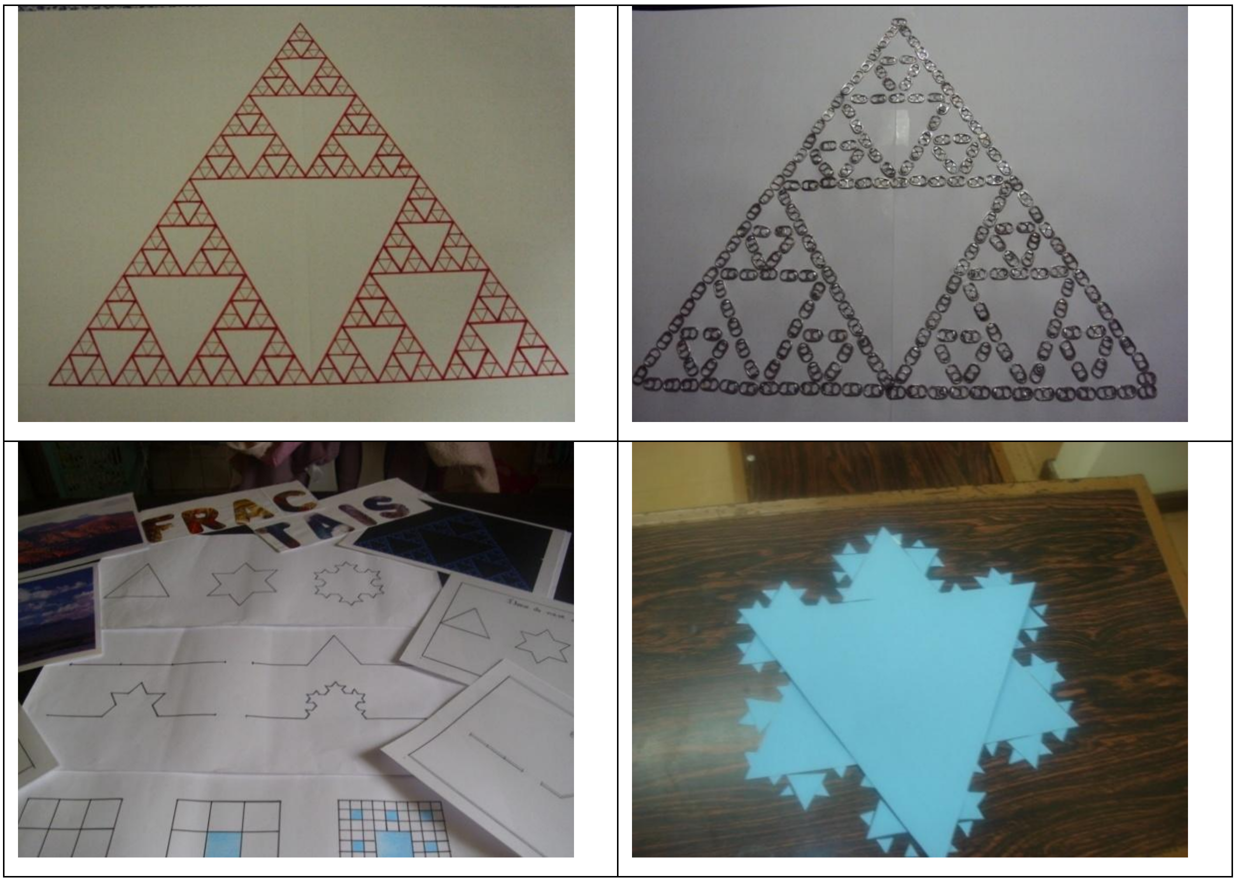
> A característica de a arte ser criação é um elemento fundamental para a educação, pois a escola é a um só tempo, o espaço do conhecimento historicamente produzido pelo homem e espaço de construção de novos conhecimentos, no qual é imprescindível o processo de criação. Assim, o desenvolvimento da capacidade criativa dos alunos, inerente à dimensão artística, tem uma direta relação com a produção de conhecimento nas diversas disciplinas. (PARANÁ, 2008, p.23).

Neste sentido, é necessário que o professor em sua prática pedagógica possibilite estes momentos de criação.

Para a apresentação muitos escolheram construir o triângulo de Sierpinski, provavelmente pela facilidade da construção, mas utilizaram materiais diferenciados, aparecendo um feito com lacre de latinhas de refrigerante. Mesmo o material não sendo adequado para representar segmentos, foi permitida à apresentação pela criatividade da construção. Um aluno desenhou o Tapete de Sierpinski, em diferentes níveis, quando questionado do porque, argumentou *"fica mais fácil explicar o que acontece em cada iteração"* (Aluno A14). Outros alunos imprimiram os fractais explorados na aula do laboratório.

Durante a exposição, na qual os alunos explanavam os conceitos apreendidos, verificou-se que alguns apresentaram um pouco de timidez, no entanto, todos tinham construído o seu fractal e relatavam o seu significado.

Esta atividade permitiu que os alunos, socializassem os resultados da aprendizagem, ampliando seus próprios conhecimentos. A seguir alguns dos fractais construídos pelos alunos para a exposição Quadro 9:



Quadro 9 - Fractais construídos pelos alunos
Fonte: Autoria própria

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O enfoque dessa pesquisa referiu-se à inserção da Geometria Fractal no ensino de Matemática da Educação Básica, conteúdo este indicado no documento que orienta o ensino no estado do Paraná, as Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE), esta pesquisa foi orientada pela questão "Como introduzir os conceitos básicos de Geometria Fractal no Ensino Médio, por meio de diferentes atividades"?

Esta questão surgiu no momento da implementação das diretrizes, devido à insegurança relatada por professores da rede pública estadual em abordar este tema, visto que o mesmo não foi tratado nos seus cursos de formação e também as pequenas referências a Geometria Fractal, apresentadas nos livros didáticos utilizados nas escolas, são apenas ilustrativas, não oferecendo um apoio que possibilite segurança ao professor.

Visando buscar resposta para tal questão, colocou-se com objetivo principal analisar se diferentes atividades de ensino permitem aos alunos compreenderem a existência e a aplicação da Geometria Fractal, nesse sentido para sua efetivação elaboramos diferentes atividades didáticas para a abordagem desta geometria em sala de aula, compondo um caderno pedagógico, que se constitui como produto dessa pesquisa, visando auxiliar o professor na sua prática pedagógica.

Para verificar a viabilidade da proposta, as atividades didáticas foram aplicadas em sala de aula, para uma turma de 40 alunos da 1ª série do Ensino Médio de um colégio estadual da cidade de Ponta Grossa no Paraná. Na aplicação, foram analisadas a aprendizagem e o comportamento dos alunos frente a as atividades na abordagem dos conceitos de Geometria Fractal.

A utilização do teste inicial, denominado pré-teste, que abordavam tópicos de Geometria Euclidiana, foi determinante nos encaminhamentos das atividades com a Geometria Fractal, tendo em vista que a partir dos resultados foi possível verificar as dificuldades dos alunos, às estratégias utilizadas na resolução das questões e a compreensão da importância da visualização no desenvolvimento dos conceitos geométricos.

Percebeu-se que, durante os diferentes momentos do trabalho, o encaminhamento metodológico utilizado foi adequado, pois possibilitou aos alunos uma participação efetiva na construção dos conceitos de Geometria Fractal além de promover a socialização.

Neste sentido, em resposta à questão que norteou esta pesquisa, a abordagem da Geometria Fractal, a partir de atividades diferenciadas, em articulação com outros conteúdos, contribui significativamente para que o aluno amplie seus conhecimentos e pensamento Geométrico sendo possível o desenvolvimento desta geometria em sala de aula.

A análise dos trabalhos realizados pelos alunos permitiu constatar que ocorreu aprendizagem e a assimilação dos conceitos, características e representações de Geometria Fractal.

Os trabalhos em grupos mostraram-se eficazes, visto que esta dinâmica possibilitou a cooperação entres os alunos, na qual um auxiliava o outro nas dificuldades.

Ainda na análise dos resultados, percebeu-se que, na abordagem de conceitos geométricos, euclidianos ou fractais a visualização e a abstração são facilitadas quando os alunos manuseiam e constroem objetos para a sua representação.

A participação do professor como mediador para a efetivação da construção dos conceitos foi fundamental, pois a passagem do concreto para a formação do pensamento matemático se efetiva com a mediação do professor.

Apesar das dificuldades apresentadas pelos alunos, nos conceitos básicos de geometria, em relação à assimilação dos conteúdos tratados foram positivos, houve efetivamente a apropriação dos conceitos como foi verificado nas discussões dos momentos da aplicação das atividades.

As atividades realizadas foram satisfatórias apesar de que o tempo para as discussões foi pequeno, devido ao fato que os alunos apresentavam dificuldades nas construções.

As aulas no Laboratório de Informática, a utilização do computador, possibilitaram aos alunos a verificação do uso pedagógico desta ferramenta. Alguns alunos relataram que em casa tinham visitado o site utilizado na aula para rever os fractais. Com relação à exploração e manipulação de Fractais utilizando o software *Fractal Forge,* facilitou o entendimento das características dos fractais além de servir como elemento motivador para os alunos.

Desta maneira, conclui-se que, o uso de atividades diversificadas no ensino de Geometria quando aliado a uma metodologia adequada possibilita a participação ativa dos alunos à aprendizagem, verificado nos relatos dos alunos. Percebeu-se também uma melhora acentuada na frequência dos alunos nos encontros de desenvolvimento do trabalho, o que normalmente não acontece em cursos no período noturno.

5.1 SUGESTÃO PARA ESTUDOS FUTUROS

No momento que, encerramos uma atividade, permanece a sensação de que se poderia ter feito mais, visto que no ensino, estamos em constante busca de melhoria em nossa prática pedagógica.

Tendo em vista, que o trabalho foi adaptado à realidade escolar em que foi desenvolvido, Ensino Médio período noturno, é importante destacar que existem outras possibilidades de estudo da Geometria Fractal e cabe ao professor, verificar qual a melhor se enquadra à sua realidade. A seguir algumas propostas como sugestão para uma ampliação do trabalho:

- A construção de fractais geométricos utilizando os recursos tecnológicos; Cabri-geometre ou GeoGebra.
- A exploração de fractais através das relações numéricas de seus elementos (perímetros, áreas e volume).

REFERÊNCIAS

ALVES, C. M. F. S. J. **Fractais:** conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino universitário. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino). Universidade de Lisboa. Lisboa, 2007.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal para sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** 2. ed. Belo Horizonte: Autentica, 2006.

BOYER, C. B. **História da matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRANCO E. Em entrevista para Marlova Estela Caldatto. **O processo coletivo de elaboração das diretrizes curriculares para a educação básica do Paraná e a inserção das geometrias não euclidianas.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Guia de livros didáticos:** PNLD - 2008 - 5ª a 8ª séries. Brasília: MEC/SEF, 2005. v.3.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. ______. **Parâmetros Curriculares Nacional:** Matemática: Brasília. MEC/SEF. 2001.

BRASIL/PR. **Lei nº 9.394**, de 20/12/1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União. Brasília: Gráfica do Senado, ano CXXXXIV, nº.248, 23/12/96, PP. 27833-27841.

CAPRA, F. **A teia da vida:** uma nova compreensão científica dos sistemas vivos. São Paulo: Pensamento-Cultrix, 1996.

CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal:** perspectivas e possibilidades no ensino de matemática. 2005. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Curso de Pós Graduação em Ensino em Ciência e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

COM CIÊNCIA.Fractais uma nova Visão da Natureza. Disponível em: <http://www.ceticismoaberto.com/ciencia/2139/fractais-uma-nova-viso-da-natureza>. 2008. Acesso em 10 de novembro de 2011.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não euclidianas.** Rio de Janeiro. Interciência, 2001.

CRUZ, D. G. **Conceitos de Geometria não euclidianas**: hiperbólica e elíptica a serem abordados nas séries do ensino médio. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portal/pde/arquivos/1734-8pdf>. Acesso em: 20 out. 2008.

DANTE, L. R. **Matemática Ensino Médio**: volume único. 1. ed. São Paulo: Ática 2005.

EVES, H. **Tópicos de história da matemática:** para uso em sala de aula **-** geometria. São Paulo: Atual 1992. v.3

FAINGUELERNT, E. K. **Educação matemática**: representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3. Ed. Campinas (SP): Autores Associados, 2009. (Coleção formação de professores).

FRACTOVIA. Site com informação e imagens de fractais. Disponível em: <http://www.fractovia.org/uberto/main_window,html>. Acesso em: 10 jan. 2012.

GASPARIN, J. L. **Uma didática para a pedagogia histórico-crítica**. 4. ed. Campinas: Autores Associados, 2007.

JANOS. M. **Geometria Fractal.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

KALEFF, A. M. Registros semióticos e obstáculos cognitivos na resolução de problemas introdutórios às geometrias não euclidianas no âmbito da formação de professores de matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 20, n. 28, p.69-94, 2007.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista,** v.3, 1º semestre, 1995.

MOREIRA, Herivelto; CALEFFE, Luiz Gonzaga. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador.** 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

NATCOMP. Imagens de Fractais. Disponível em: <http://www.natcomp.com.br/lvcon/tema?tema=6>. Acesso em 20 jan. 2012.

NEVES, R. S. P. Aprender e ensinar Geometria: um desafio permanente. In: Programa de Gestão da Aprendizagem Escolar – Gestar II. **Matemática:** Caderno de Teoria e Prática 3 – matemática nas formas geométricas e na ecologia. Brasília: MEC/SEB, 2008.

NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. 2006. Departamento de Matemática Pura. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Lisboa, 2006.

OLIVEIRA, L. H. A matemática do delírio. **Superinteressante,** São Paulo: Abril, v.8, n. 10, out. 1994.

PAIS, L. C. **Estratégias de ensino de geometria em livros didáticos de matemática em nível de 5ª a 8ª série do ensino fundamental.** Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_29/estrategias.pdf> Acesso em 07 jun. 2011.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Departamento de Ensino de Primeiro Grau. **Currículo Básico para a Escola Pública do Paraná.** Curitiba: SEED/DEPG, 1990.

______. ______. **Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática**. Curitiba: SEED, 2008.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké,** Campinas, n.1, p. 19-49, 1993.

RIBAS, M. H **Construindo a competência:** processo de formação de professores. São Paulo; Olho D'Água, 2001.

SILVA, E. L.; MENEZES, E. M. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação.** 3. ed. Florianópolis: UFSC, 2001.

SMOLE. K. S. **A matemática na educação infantil:** teoria das inteligências múltiplas na prática escolar. Porto Alegre: Artmed,1996.

SMOLE. K. S. DINIZ, M. I. **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SMOLE, K; DINIZ, M. I. & CÂNDIDO, P. **Resolução de problemas:** matemática de 0 a 6. Porto Alegre: Artmed. 2000.

SMOLE, K; DINIZ, M. I. **Matemática ensino médio**. São Paulo: Saraiva, 2007.

SOUZA, J. R. Novo olhar matemática: ensino médio. São Paulo: FTD. 2010. (Coleção novo olhar; v. 1).

TRACH, C. Investigando matematicamente alguns fractais por meio do software Geogebra. União da Vitória. 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portal/pde/>. Acesso em 4 jan. 2010.

ULTRA FRACTAL. Software para criação e estudo de fractais. Disponível em: <http://www.ultrafractal.com/download>. Acesso em 01 fev. 2012.

APÊNDICE A - FOTOS DA APRESENTAÇÃO DO FRACTAL CONSTRUÍDO PELOS ALUNOS DURANTE A REALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES

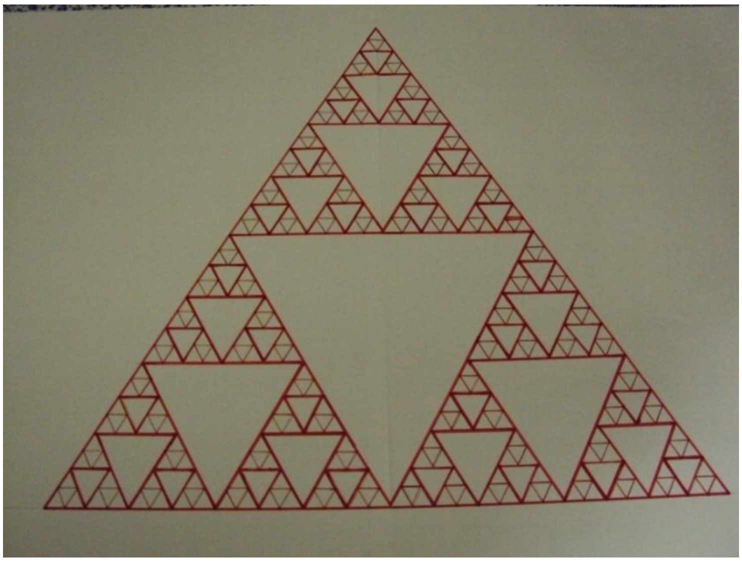


Figura 13 - Fractais elaborados pelos alunos
Fonte: Acervo da autora

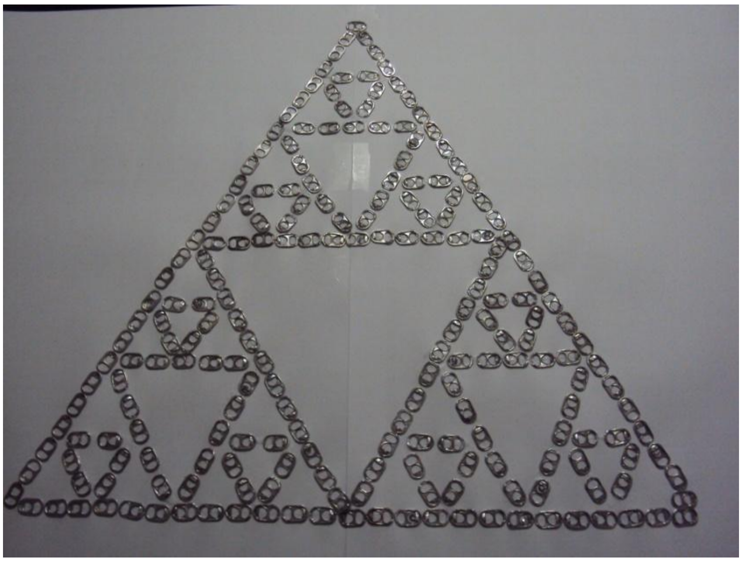


Figura 14 - Fractais elaborados pelos alunos
Fonte: Acervo da autora

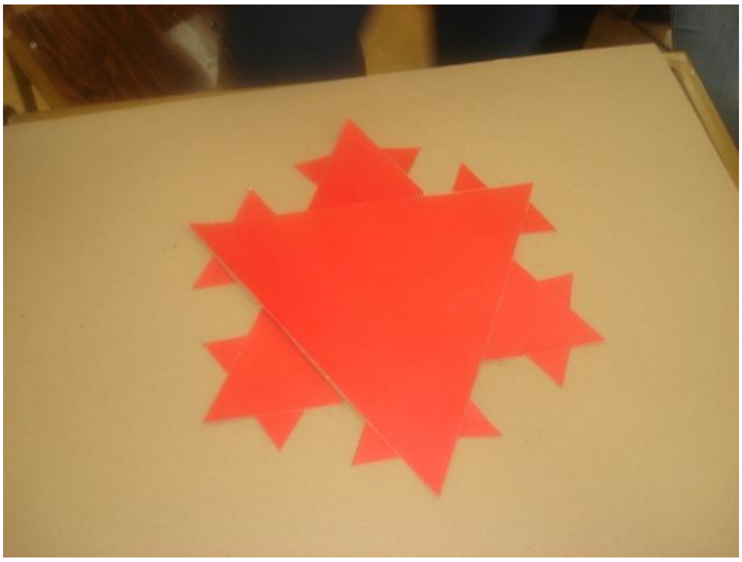


Figura 15 - Fractais elaborados pelos alunos
Fonte: Acervo da autora

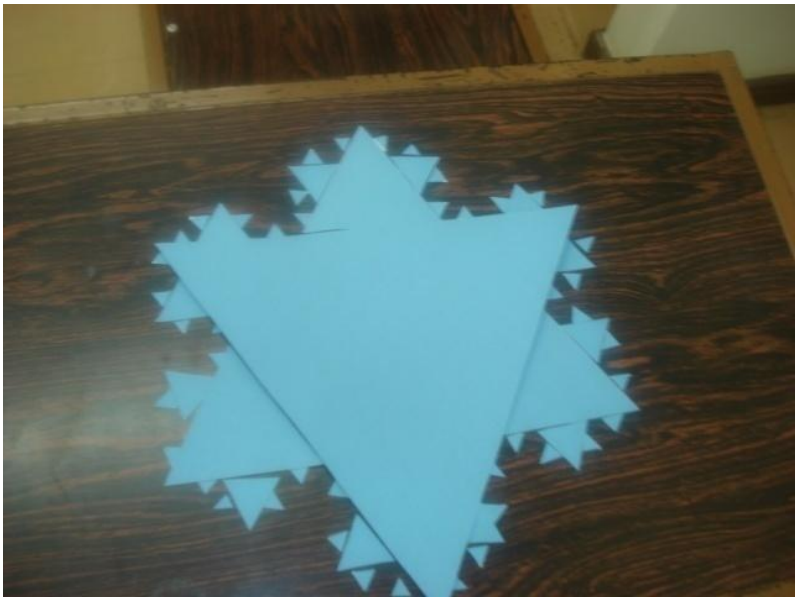


Figura 16 - Fractal elaborado pelo aluno com recortes de triângulos
Fonte: Acervo da autora

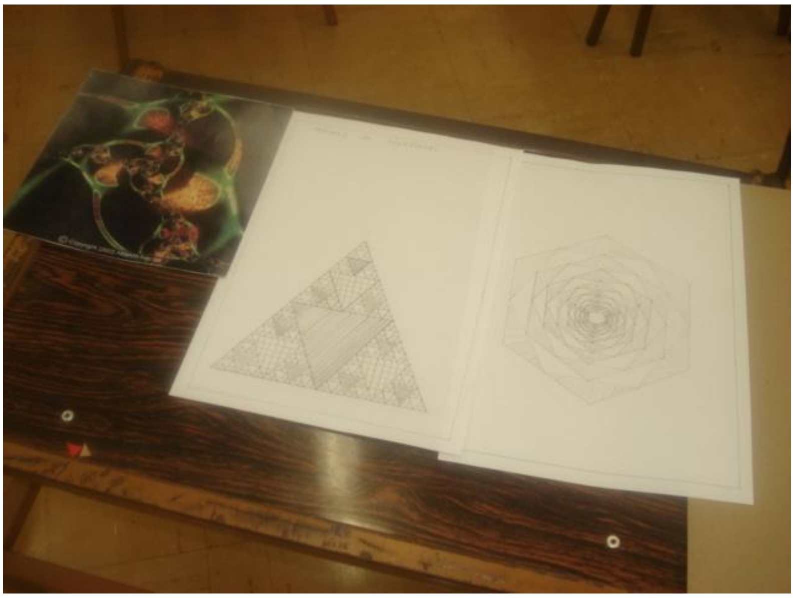


Figura 17 - Fractais elaborados pelos alunos
Fonte: Acervo da autora

Figura 18 - Fractais elaborados pelos alunos
Fonte: Acervo da autora

Figura 19 - Fractais elaborado pelos alunos
Fonte: Acervo da autora

Figura 20 - Alunos desenvolvendo atividade
Fonte: Acervo da autora

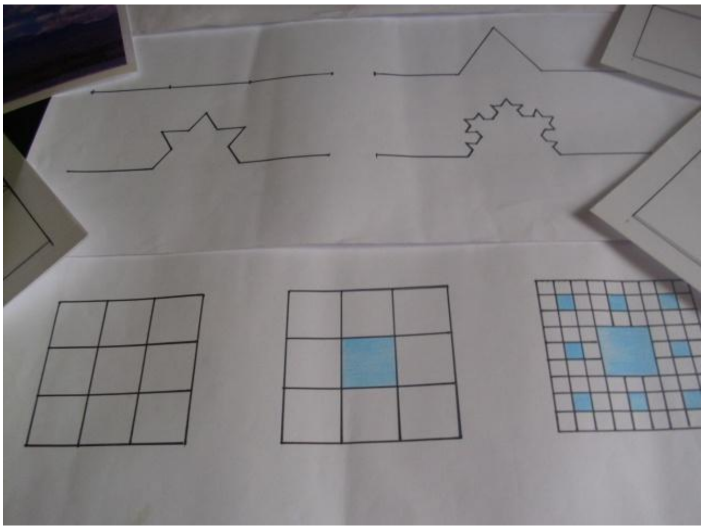


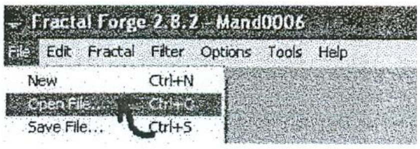
Figura 21 - Fractais elaborado pelos alunos
Fonte: Acervo da autora

APÊNDICE B - TUTORIAL PARA UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE FRACTAL FORGE ELABORADO POR ELIZABETE FELD E MARISTEL DO NASCIMENTO

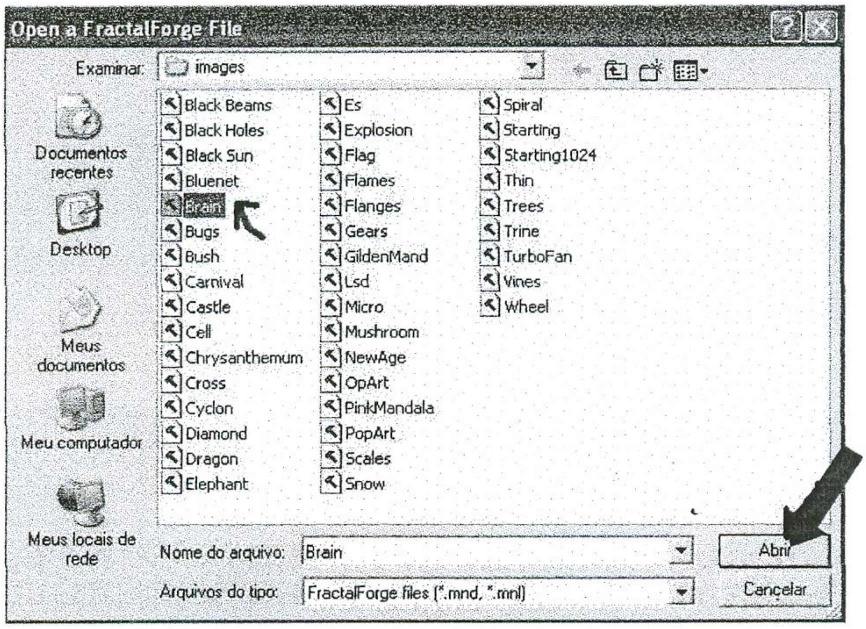
Matemática no Computador
Trabalhando com software para visualizar Fractais

* Abrir a pasta Fractais, na área de trabalho e dar um duplo clique no programa **Fractal Forge** para executá-lo.

* Em seguida clicar em -> File -> Open File ->

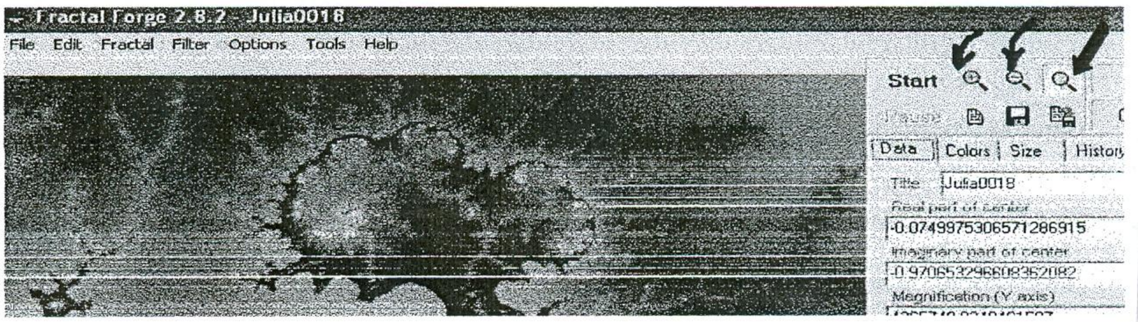


*Aparecerá uma janela com muitas opções de imagens de Fractais ->



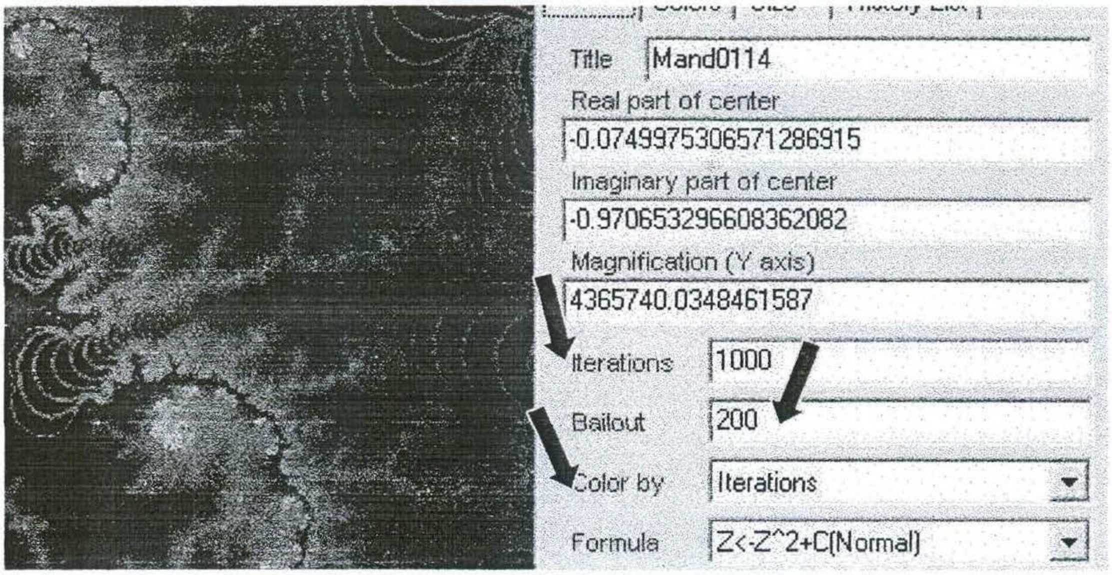
➔ Como exemplo inicial vamos selecionar a imagem -> Brain -> clicar em abrir.

➔ Aparecerá a imagem do Fractal e ao lado é possível observar três lupas, as lupas são ferramentas de visualização, podemos ampliar, reduzir ao ainda manter as mesmas dimensões da figura, basta clicar na ferramenta desejada e em seguida na figura.



Mais abaixo pode ser verificado o título do Fractal, é possível alterar as Iterations (divisões sucessivas da figura, valores mais altos maior tempo para concluir), bailout (distância máxima para órbitas. Pontas: escala entre 4 e 128), Color (cores para a figura), Fórmula (cada imagem é criado a partir de uma fórmula)...

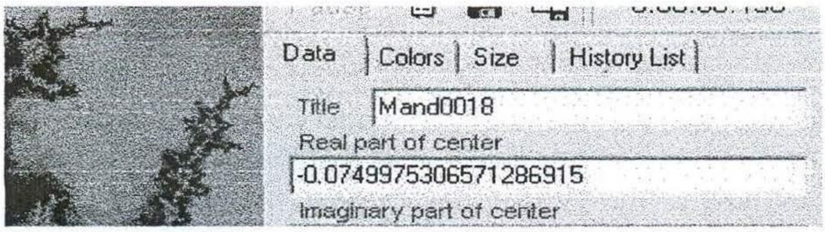
➔ Altere esses valores conforme o exemplo abaixo.



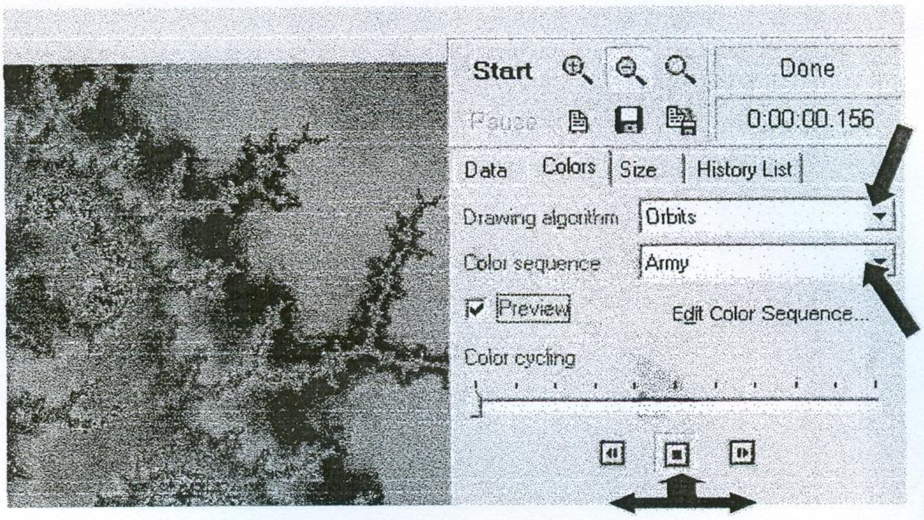
➔ Faça mais algumas alterações para testar como fica a imagem do fractal.

➔ Abra novamente o arquivo -> Open File -> escolha uma outra imagem de Fractal, faça alguns testes conforme desejar.

➔ Observe que o lado esquerdo onde aparecem as informações sobre o Fractal, existem as abas: Data, Colors, Size, History List.

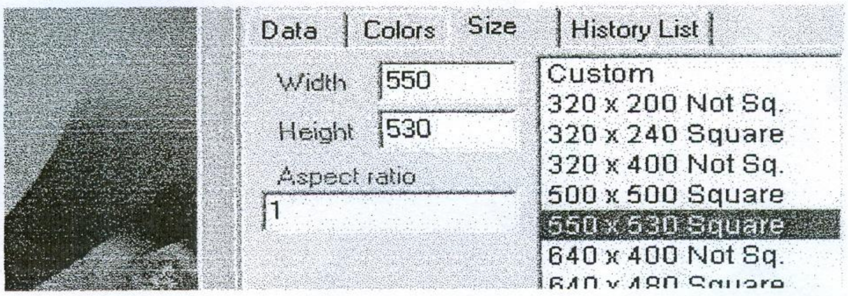


➔ Clique na aba **Colors** e escolha as opções conforme sugeridas nas imagens da figura seguinte, para **Drawing Algorithm-> Orbits,** para **Color Sequence** -> **Army**. Para verificar o ciclo das cores clique nos botões abaixo: Avançar para Esquerda, Parar e Avançar para a Direita.



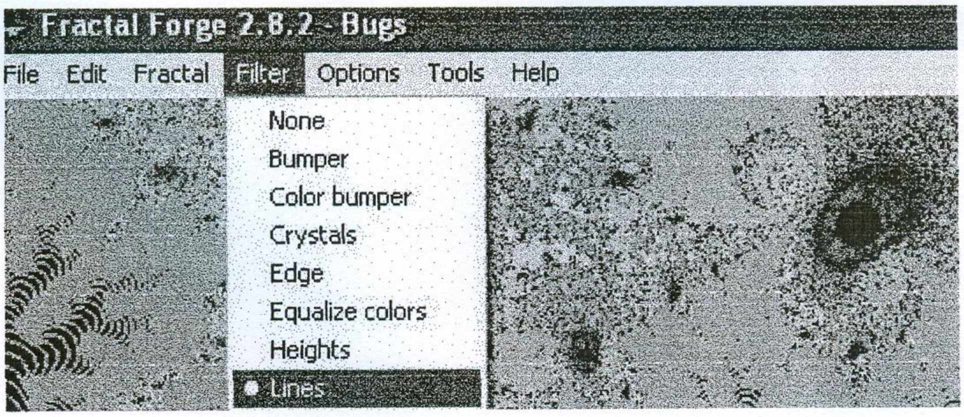
➔ Agora faça mais algumas escolhas e verifique o ciclo.

➔ Na **Aba Size** é possível alterar o tamanho da apresentação da imagem, faça alguns testes selecionando as opções em **Custom.**



➔ Na Aba History List temos as informações a respeito da imagem.

➔ Na barra superior observe o Menu -> Filter, escolha uma opção conforme a figura abaixo e depois faça outras escolhas para testar.



➔ Depois de visualizar e trabalhar com algumas imagens escolha a que mais agradou.

➔ No Menu Save -> clique em Save Image -> salve a imagem no seu disquete.